Vận dụng cao nhị thức NEWTON

Một sản phẩm của fanpage Tạp chí và tư liệu toán học

Dành tặng cho bạn đọc theo dõi fanpage

CÁC BÀI TOÁN KHÓ	ÔN THI ĐẠI HỌC	BỒI DƯỠNG HSG

BẢN PDF ĐƯỢC PHÁT HÀNH MIỄN PHÍ
TẠI BLOG CỦA FANPAGE

☺ CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN ☺



LỜI GIỚI THIỆU

Trong đề thi thử của các trường hay trong đề thi THPT Quốc Gia thì các bài toán về chủ đề nhị thức Newton hầu như sẽ chiếm khoảng 1 câu mức độ khó hay dễ tùy vào người ra đề. Bài toán này không phải là dạng toán quá khó nhưng do cách phát biểu và công thức liên quan khá là cồng kềnh và khó nhớ nên nó làm khó khăn cho tương đối nhiều bạn học sinh. Vì thế trong sản phẩm lần này, mình sẽ giới thiệu cho các bạn các phương pháp hay và mạnh để giải quyết các bài toán đẳng thức liên quan tới nhị thức Newton ở mức độ vận dụng và vận dụng cao. Để có thể viết nên được chuyên đề này không thể không có sự tham khảo từ các nguồn tài liệu của các các group, các khóa học, tài liệu của các thầy cô mà tiêu biểu là

1. Thầy Lã Duy Tiến – Giáo viên trường THPT Bình Minh
2. Website Toán học Bắc – Trung – Nam: http://toanhocbactrungnam.vn/
3. Website Toanmath: https://toanmath.com/
4. Thầy Đặng Thành Nam – Giảng viên Vted
5. Thầy Huỳnh Đức Khánh
6. Thầy Nguyễn Hữu Quyết – THPQ Bố Trạch 1 tỉnh Quảng Bình
7. Thầy Lê Hồng Thái – Vĩnh Yên

Trong bài viết mình có sưu tầm từ nhiều nguồn nên có thể sẽ có những câu hỏi chưa hay hoặc chưa phù hợp mong bạn đọc bỏ qua. Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc có thể góp ý trực tiếp với mình qua địa chỉ sau:

Nguyễn Minh Tuấn

Sinh viên K14 – Khoa học máy tính – Đại học FPT

Facebook: https://www.facebook.com/tuankhmt.fpt

Email: tuangenk@gmail.com

Blog: https://lovetoan.wordpress.com/

NHỊ THỨC NEWTON VẬN DỤNG CAO

GIỚI THIỆU VỀ NHỊ THỨC NEWTON

Để ghi nhớ công lao của Isaac Newton (1642 – 1727) trong việc tìm ra công thức khai triển nhị thức sau, *được gọi là nhị thức Newton*.

$$(x+1)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)(m-2)...3.2.1}{m!}x^m \quad (1)$$

Trên bia mộ của Newton tại tu viện Wesminster (*là nơi an nghỉ của Hoàng gia và những người nổi tiếng của nước Anh*) người ta còn khắc họa hình Newton cùng với cả nhị thức Newton. Vậy có phải chăng loài người đã không hề biết gì về công thức khai triển nhị thức trước khi có phát minh của nhà bác học vĩ đại này ? Theo các văn bản còn lưu giữ được từ rất lâu trước Newton, ngay từ 200 năm trước Công nguyên các nhà toán học Ấn Độ đã quen biết với một bảng tam giác số học. Trong tác phẩm của nhà toán học Trung Quốc Chu Sinh viết từ năm 1303 người ta tìm thấy bảng số sau:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Rõ ràng đó là các hệ số của công thức khai triển nhị thức Newton từ cấp 0 đến cấp 8, dù nhà toán học này đã không nói gì cho các hệ số tiếp theo cùng công thức tổng quát của chúng, nhưng theo cách thức lập bảng của ông, ta có thể dễ dàng tìm ra quy luật cho phép viết được các hàng mới.

Vào nửa đầu thế kỉ XV trong tác phẩm chìa khóa số học viết bằng tiếng Ả rập của nhà toán học, thiên văn học Xamacan có tên là Giêm Xit-Giaxedin Casi người ta lại gặp *tam giác số học* mà tác giả đã gọi tên rõ hơn là *các hệ số nhị thức* cùng với những chỉ dẫn cách thành lập các hàng kế tiếp của nhị thức. Với lối chỉ dẫn (không chứng minh) đó Casi đã cho ta khả năng khai triển nhị thức ở một cấp bất kì. Có thể coi đó là sự phát biểu bằng văn đầu tiên trong lịch sử của định lí về nhị thức Newton. Ở châu Âu, *tam giác số học* được tìm thấy đầu tiên trong công trình của nhà toán học người Đức Stiffel M. Công bố vào năm 1544. Trong công trình



Isaac Newton Jr

này cũng đã chỉ dẫn ra các hệ số của nhị thức cho đến cấp 17.

Gần một trăm năm sau, hoàn toàn độc lập với nhau, Các nhà toán học người Anh Bô-rit-gôn (1624), nhà toán học Pháp Fermat (1636) rồi nhà toán học Pháp Pascal (1654) đã đưa ra công thức hoàn hảo về *hệ số của nhị thức Newton*. Đặc biệt trong công trình mang tên *Luận văn về tam giác số học* công bố vào năm 1665, Pascal đã trình bày khá chi tiết về tính chất của các hệ số trong *tam giác số học* và từ đó tam giác số học được sử dụng một cách rộng rãi và tên *tam giác Pascal* ra đời thay cho tam giác số học.

Rõ ràng mà nói về mặt lịch sử thì tam giác số học đã được các nhà toán học Á đông xét đến trước Pascal rất nhiều. Vậy vai trò của Newton ở đâu trong quá trình hình thành công thức nhị thức Newton ? Năm 1676 trong bức thư thứ nhất gửi Ô-đen Hiaro – Chủ tịch Viện Hàn Lâm hoàng gia Anh, Newton đã đưa công thức (1) mà không dẫn giải cách chứng minh. Sau đó ít lâu trong bức thư thứ hai gửi đến Viện Hàn Lâm, Newton đã trình bày rõ ràng bằng cách nào ông đi đến công thức đó. Thì ra bằng cách này Newton đã tìm ra công thức Newton từ năm 1665 khi mà ông chỉ mới 22 tuổi. Nhưng dù vậy thì việc đưa trình công thức của mình Newton cũng không nói được điều gì mới cho các nhà toán học đương thời.

Vậy tại sao công thức không mới đó lại mang tên Newton ? Vấn đề là ở chỗ ý tưởng của Newton không dừng lại ở việc áp dụng công thức này cho trường hợp các số mũ là *số nguyên dương* mà cho số mũ bất kì: *số dương, số âm, số nguyên và phân số*. (*ở trung học chỉ học số mũ nguyên dương*)

Chính ý tưởng mới đó cho một ý nghĩa lớn lao đối với việc phát triển của toán học. Các nhà toán học đương thời thấy ngay tầm quan trọng của công thức và công thức được áp dụng rộng rãi trong nhiều công trình nghiên cứu toán học, đặc biệt trong đại số và giải tích. Nhân đây cũng phải nói thêm rằng công thức nhị thức Newton không phải là sự đóng góp lớn nhất của Newton cho toán học. Newton đã đóng góp rất nhiều cho việc mở đầu những hướng toán học cao cấp, đó là các phép tính đối với các đại lượng vô cùng bé. Và do vậy đôi lúc Newton được coi là người sáng lập ra ngành Giải tích toán học

I. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON.

Khai triển $(a+b)$ được cho bởi công thức sau:

Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n.(1)$$

Quy ước $a^0=b^0=1$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đén 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

HỆ QUẢ

- Với $a=b=1$, thì ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$.
- Với $a=1; b=-1$, ta có $0=C_n^0-C_n^1+...+(-1)^k C_n^k+...+(-1)^n C_n^n$

CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN LIÊN QUAN TỚI KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

- $(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^kx^{n-k}+...+C_n^{n-1}x+C_n^n$
- $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$
- $(x-1)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^k C_n^kx^k+...+(-1)^{n-1} C_n^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n C_n^nx^n$
- $C_n^k=C_n^{n-k}$
- $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}, (n\ge 1)$
- $k.C_n^k=\dfrac{k.n!}{(n-k)!k!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$
- $\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{k.n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Một số công thức thường dùng trong các bài tập dạng này như sau:

- $C_n^k=C_n^{n-k}$
- $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}, (n>1)$
- $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}(*)$
- $\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$
- $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$
- $2^{n-1}=C_n^0+C_n^2+C_n^4...+C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$
- $2^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5...+C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$

Ngoài ra từ công thức $(*)$ ta mở rộng được công thức

- $C_n^k+2C_n^{k+1}+C_n^{k+2}=C_{n+2}^{k+2}$
- $C_n^k+3C_n^{k+1}+3C_n^{k+2}+C_n^{k+3}=C_{n+3}^{k+3}$

II. GIỚI THIỆU TAM GIÁC PASCAL.

$n=0$						1					
$n=1$					1		1				
$n=2$				1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1		
$n=4$		1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5		1

Tam giác Pascal được thiết lập theo quy luật sau

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n $(n\ge 1)$ thì hàng thứ n+1tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Nhận xét.

Xét hàng thứ nhất, ta có $1=C_1^0,\ 1=C_1^1$.

Ở hàng thứ 2, ta có $1=C_3^0,\ 2=C_2^1,\ 1=C_2^2$.

Ở hàng thứ 3, ta có $1=C_3^0,\ 3=C_3^1, 3=C_3^2,\ 1=C_3^3$.

Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm $(n+1)$ số $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,...,\ C_n^{n-1},\ C_n^n$.

DẤU HIỆU SỬ DỤNG NHỊ THỨC NEWTON.

Sau đây là một số dấu hiệu giúp ta nhận biết được các dạng toán trong phần này, các dạng toán này sẽ được hướng dẫn kỹ hơn ở phần sau.

a) Khi cần chứng minh đẳng thức hay bất đẳng thức mà có $\sum_{i=1}^{n} C_n^i$ với i là số tự nhiên liên tiếp.

b) Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} i(i-1)C_n^i$ thì ta dùng đạo hàm $(i\in\mathbb{N})$

- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n}(i+k)C_n^i$ thì ta nhân 2 vế với x^k rồi lấy đạo hàm
- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} a^k C_n^i$ thì ta chọn giá trị của x=a thích hợp.
- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i-1}C_n^i$ thì ta lấy tích phân xác định trên $[a;b]$ thích hợp.
- Nếu bài toán cho khai triển $(x^a+x^b)^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^i(x^a)^{n-i}(x^b)^i=\sum_{i=1}^{n}C_n^i x^{a(n-i)+ib}$ thì hệ số của x^m là C_n^i sap cho phương trình $a(n-i)+bi=m$ có nghiệm $i\in\mathbb{N}$

- C_n^i đạt max khi $i=\frac{n-1}{2}$ hay $i=\frac{n+1}{2}$ với n lẽ, $i=\frac{n}{2}$ với n chẵn.

III. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN TỚI NHỊ THỨC NEWTON.

1. BÀI TOÁN KHAI TRIỂN NÂNG CAO.

BÀI TOÁN KHAI TRIỂN TAM THỨC

Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton $(a+b+c)^n$

Lời giải tổng quát

- **Bước 1:** Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n, để có được hệ số của nhị thức Newton $(b+c)^n$.
- **Bước 2:** Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a+1)^n$.
- **Bước 3:** Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$1.a^n$					1					
$C_n^1.a^{n-1}$				1b		1c				
$C_n^2.a^{n-2}$			1b^2		2bc		1c^2			
$C_n^1.a^{n-3}$		1b^2		3b^{2}c		3bc^2		1c^2		
					...					
$1.a^o$	$1.b^n$		$C_n^1.b^{n-1}.c$		...		$C_n^{n-1}.b.c^{n-1}$		$1.c^n$	

Sau khi cộng lại ta được:

$$(a+b+c)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p.a^{n-p}.\left(\sum_{q=0}^{n}C_p^q.b^{n-q}.c^q\right)=\sum_{0\le q\le p\le n}C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$$

Sau khi khai triển $(a+b+c)^n$ với $0\le q\le p\le n$ số hạng thứ $p+1$ trong khai triển là $T_p=C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$.

Ví dụ 1: Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là?

Lời giải

Với $0\le q\le p\le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$T_p=C_{10}^p.C_p^q.\left(3x^2\right)^{10-p}.x^{p-q}.1^q=C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.x^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì $p-q+20-2p=4\Leftrightarrow p+q=16$

Do $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\{(8;8);(9;7);(10;6)\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$C_{10}^{8}.C_{8}^{8}.3^{10-8}+C_{10}^{9}.C_{9}^{7}.3^{10-9}+C_{10}^{10}.C_{10}^{6}.3^{10-10}=1695.$$

Chú ý khi ra nhiều trường hợp của $(p;q)$ thì ta công hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

Ví dụ 2: Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$?

Lời giải

Với $0\le q\le p\le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

$$T_p=C_{10}^{p}.C_{p}^{q}.x^{10-p}.\left(x^2\right)^{p-q}.\left(x^3\right)^{q}=C_{10}^{p}.C_{p}^{q}.3^{10-p}.x^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10+p+q=13\Leftrightarrow p+q=3$

Do $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\{(2;1);(3;0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là: $C_{10}^{2}.C_{2}^{1}+C_{10}^{3}.C_{3}^{0}=210$.

Ví dụ 3: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của: $\left[1+x^2(1-x)^8\right]$

Lời giải

Cách 1. Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left[x^2(1-x)\right]^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^k x^{2k}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x^i\right]^k$.

Vậy ta có hệ số của x^8 là: $(-1)^i C_8^k C_k^i$ thoả $\begin{cases}0\le i\le k\le 8\\ 2k+i=8\\ i,k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}i=0\\k=4\end{cases}\\ \begin{cases}i=2\\k=3\end{cases}\end{array}\right.$

Hệ số trong khai triển của x^8 là $(-1)^0C_8^4C_4^0+(-1)^2C_8^3C_3^2$ =238

Cách 2. Ta có: $f(x)=C_8^0+...+C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3+C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4+...+C_8^8\left[x^2(1-x)\right]^8$

Nhận thấy: x^8 chỉ có trong các số hạng:

- Số hạng thứ 4: $C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3$
- Số hạng thứ 5: $C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4$

Với hệ số tương đương với: $A_8=C_8^3C_3^2+C_8^4C_4^0$=238

Ví dụ 4: Với n là số nguyên dương và $x\ne 0$, xét biểu thức $\left(x^8+x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^7}\right)^n$. Hỏi có bao nhiêu số $n\le 2018$ sao cho khai triển của biểu thức trên có số hạng tự do là 0?

Lời giải

Ta có $\left(x^8+x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^7}\right)^n=\left(1+x^5\right)^n\left(x^3+\frac{1}{x^7}\right)^n$ nên số hạng tổng quát của khai triển trên là $T=C_n^k x^{5k}\cdot C_n^h x^{3n-10h}=C_n^kC_n^h x^{3n+5k-10h}$. Số hạng này là số hạng tự do khi

$$3n+5k-10h=0 \Leftrightarrow 3n=5(2h-k)$$

Nếu n không chia hết cho 5 thì khai triển sẽ không chứa số hạng tự do, tức là số hạng tự do là 0. Còn khi n chia hết cho 5 thì khi $h=\frac{2n}{5}, k=\frac{n}{5}$, số hạng tự do sẽ là $C_n^k C_n^h \neq 0$ không thỏa mãn.

Ví dụ 5: Cho khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}$, với $n \geq 2$ và a_0, a_1, a_2, ..., a_{2n} là các hệ số. Biết rằng $\frac{a_3}{14}=\frac{a_4}{41}$, khi đó tính tổng $S=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2n}$?

Lời giải

Ta có $\left(1+x+x^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x+x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l x^{k-l}.x^{2l}$.

Hệ số của x^3 là $x^{k+l}=x^3 \Rightarrow k+l=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l=0;k=3 \\ l=1;k=2 \end{array}\right. \Rightarrow a_3 = C_n^3C_3^0 + C_n^2C_2^1$.

Tương tự hệ số của x^4 là $x^{k+l}=x^4 \Rightarrow k+l=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l=0;k=4 \\ l=1;k=3 \\ l=2;k=2 \end{array}\right. \Rightarrow a_4 = C_n^4C_4^0 + C_n^3C_3^1 + C_n^2C_2^2$.

Theo giả thiết $14a_4 = 41a_3 \Leftrightarrow 14\left(C_n^4C_4^0 + C_n^3C_3^1 + C_n^2C_2^2\right) = 41\left(C_n^3C_3^0 + C_n^2C_2^1\right)$

$$\Leftrightarrow 14\left(\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{3.n!}{3!(n-3)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)=41\left(\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{2.n!}{2!(n-2)!}\right)$$

$$\Leftrightarrow 14\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)=41\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+n(n-1)\right)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)\left(\frac{14}{24}n^2-\frac{11}{4}n-\frac{185}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=10 \end{array}\right. \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

Do $n \geq 2$ nên $n=10$.

Mặt khác thay $x=1$ vào hai vế của khai triển $\left(1+x+x^2\right)^{10} = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{20}x^{20}$ ta được $S=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{20}=3^{10}$.

Ví dụ 6: Giả sử $\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{10}\right)^{11} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{110}x^{110}$ với a_0, a_1, a_2, ..., a_{110} là các hệ số. Tính tổng $T=C_{11}^0a_{11}-C_{11}^1a_{10}+C_{11}^2a_9-C_{11}^3a_8+\ldots+C_{11}^{10}a_1-C_{11}^{11}a_0$?

Lời giải

Ta có: $A=\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{10}\right)^{11} \Leftrightarrow (1-x)^{11}A=\left(1-x^{11}\right)^{11}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k(-x)^k.\sum_{i=0}^{110}a_ix^i}_{P} = \underbrace{\sum_{m=0}^{11} C_{11}^m\left(-x^{11}\right)^m}_{Q}.$$

Hệ số của x^{11} trong P là $C_{11}^0a_{11}-C_{11}^1a_{10}+C_{11}^2a_9-C_{11}^3a_8+\ldots+C_{11}^{10}a_1-C_{11}^{11}a_0=T$

Hệ số của x^{11} trong Q là $-C_{11}^1$

Vậy $T=-C_{11}^{1}=-11$.

Ví dụ 7: Biết tổng các hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển Newton

$$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\left(x^2\right)^{n-k}.\left(\frac{2}{x}\right)^k$$

Bằng 49. Khi đó tính hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển đó?

Lời giải

Ta có $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\left(x^2\right)^{n-k}.\left(\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_6^k(-1)^k.2^k.x^{2n-3k}$.

Tổng các hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển bằng 49 nên $C_n^0-2C_n^1+2^2C_n^2=49(*)$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\ 1-2n+2^2.\frac{n(n-1)}{2}=49\Leftrightarrow 2n^2-4n-48=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=-4(L)\\n=6(N)\end{array}\right.$

Với $n=6$ ta có nhị thức $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$.

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_6^k(-1)^k.2^k.x^{12-3k}\ \ (k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq 6)$.

Số hạng chứa x^3 ứng với k thỏa mãn $12-3k=3\ \Leftrightarrow\ k=3$ (nhận).

Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển là $C_6^3(-1)^3.2^3=-160$.

Ví dụ 8: Cho khai triển $T=\left(1+x-x^{2017}\right)^{2018}+\left(1-x+x^{2018}\right)^{2017}$. Hệ số của số hạng chứa x trong khai triển bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1. Ta có $T=\sum_{k=0}^{2018}C_{2018}^k\left(x-x^{2017}\right)^k+\sum_{k'=0}^{2017}C_{2017}^{k'}\left(x^{2018}-x\right)^{k'}$.

Hệ số của số hạng chứa x ứng với $k=k'=1$.

Do đó hệ số cần tìm là $C_{2018}^1-C_{2017}^1=1$.

Cách 2. Ta có $T=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2017.2018}x^{2017.2018}=f(x)$

$\Rightarrow f'(x)=a_1+2a_2x+...+2017.2018a_{2017.2018}x^{2017.2018-1}\Rightarrow f'(0)=a_1$.

Mà $f'(x)=2018\left(1+x-x^{2017}\right)^{2017}\left(1-2017x^{2016}\right)+2017\left(1-x+x^{2018}\right)^{2016}\left(-1+2018x^{2017}\right)$

$\Rightarrow f'(0)=2018-2017=1\Rightarrow a_1=1$. Do đó hệ số cần tìm là 1.

Ví dụ 9: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(2x+1)^6\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức?

Lời giải

Xét khai triển $(2x+1)^6=(1+2x)^6=\sum_{k=0}^{n}C_6^k1^{6-k}(2x)^k=\sum_{k=0}^{n}C_6^k2^kx^k$

$$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^8=\left(\frac{1}{2}+x\right)^8=\sum_{j=0}^{8}C_8^j\left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}x^j$$

Vậy $(2x+1)^6\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4=\sum_{k=0}^{n}C_6^k2^kx^k.\sum_{j=0}^{8}C_8^j\left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}x^j=\sum_{k=0}^{n}C_6^k2^k.\sum_{j=0}^{8}C_8^j\left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}x^{j+k}$

Số hạng của khai triển chứa x^6 khi $j+k=6$.

Xét bảng:

k	0	1	2	3
j	6	5	4	3
$C_6^k2^k.C_8^j\left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^02^0.C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$C_6^12^1.C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$C_6^22^2.C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$C_6^32^3.C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$
k	4	5	6	
j	2	1	0	
$C_6^k2^k.C_8^j\left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^42^4.C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^52^5.C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$C_6^62^6.C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^2$	

Vậy hệ số x^6 trong khai triển $(2x+1)^6\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là $\frac{3003}{4}=\frac{1}{4}C_{14}^6$.

Ví dụ 10: Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $n\ge 1$. Tìm số giá trị nguyên của n với $n\le 2018$ sao cho tồn tại k $(0\le k\le n-1)$ thỏa mãn $a_k=a_{k+1}$.

Lời giải

Ta có $(1+2x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kx^k$, suy ra $a_k=C_n^k2^k$ với $k=0,1,2,3,...,n$.

Do đó $a_k=a_{k+1}\Leftrightarrow C_n^k2^k=C_n^{k+1}2^{k+1}\Leftrightarrow\frac{n!}{k!(n-k)!}=2.\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(n-k)}=\frac{2}{(k+1)}\Leftrightarrow 2n-2k=k+1\Leftrightarrow k=\frac{2n-1}{3}$.

Vì $0\le k\le n-1$ nên suy ra $n\ge 2$.

Nếu $n=3m, m\in\mathbb{N}$, thì $k=\frac{2.3m-1}{3}=2m-\frac{1}{3}\notin\mathbb{N}$.

Nếu $n=3m+1, m\in\mathbb{N}$, thì $k=\frac{2.(3m+1)-1}{3}=2m+\frac{1}{3}\notin\mathbb{N}$.

2. BÀI TOÁN HỆ SỐ LỚN NHẤT.

Với các bài toán yêu cầu tìm hệ số lớn nhất a_k khi khai triển nhị thức $(ax+b)^n$ thành đa thức ta sẽ làm theo phương pháp sau.

- Bước 1: Lập hệ bất phương trình $\begin{cases}a_k\ge a_{k-1}\\a_k\ge a_{k+1}\end{cases}$

- Bước 2: Giải hệ bất phương trình trên để tìm các số nguyên k thỏa mãn.
- Bước 3: Thay các giá trị k vừa tìm được để tìm hệ số lớn nhất.

Ví dụ 1: Khai triển đa thức $P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+...+a_{12}x^{12}$.

Tìm $\max(a_0,a_1,a_2,...,a_{12})$?

Lời giải

Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra: $a_k>a_{k-1}$

Từ đây ta có hệ phương trình $\begin{cases}2^kC_{12}^k\ge 2^{k-1}C_{12}^{k-1}\\ 2^kC_{12}^k\ge 2^{k+1}C_{12}^{k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{k}\ge\dfrac{1}{12-k+1}\\ \dfrac{1}{12-k}\ge\dfrac{2}{k+1}\end{cases}$

$\Rightarrow\max(a_0,a_1,a_2,...,a_{12})=a_8=C_{12}^8 2^{18}=126720$

Ví dụ 2: Cho khai triển nhị thức $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_9x^9+a_{10}x^{10}$.

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{10}=\dfrac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10}=\dfrac{1}{3^{10}}\sum_{k=0}^{n}C_{10}^k(2x)^k\Rightarrow a_k=\dfrac{1}{3^{10}}C_{10}^k2^k$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\ a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k+1}2^{k+1}\\ C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k-1}2^{k-1}\end{cases}$$

Ta có a_k đạt được max $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2^k10!}{k!(10-k)!}\ge\dfrac{2^k10!}{(k+1)!(9-k)!}\\ \dfrac{2^k10!}{k!(10-k)!}\ge\dfrac{2^k10!}{(k-1)!(11-k)!}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{10-k}\ge\dfrac{2}{k+1}\\ \dfrac{2}{k}\ge\dfrac{2}{11-k}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{19}{3}\le k\le\dfrac{22}{3}$

$$\Rightarrow k=7\left(k\in\mathbb{N},k\in[0,10]\right)$$

Vậy max $a_k=a_7=\dfrac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7$

Ví dụ 3: Trong khai triển biểu thức $F=\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là?

Lời giải

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên

thì $\begin{cases}k\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le 9\\ (9-k)\vdots 2\\ k\vdots 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=3\Rightarrow T_4=C_9^3\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=4536\\ k=9\Rightarrow T_{10}=C_9^9\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=8\end{array}\right.$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4 = 4536$ và $T_{10} = 8$.

Ví dụ 4: Hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $P(x) = (1+2x^2)^{12}$ thành đa thức là?

Lời giải

Khai triển $P(x) = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{12} a_k x^{2k}$ với $a_k = C_{12}^k 2^k$.

- $a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow C_{12}^{k+1} 2^{k+1} > C_{12}^k 2^k \Leftrightarrow \dfrac{2}{k+1} > \dfrac{1}{12-k} \Leftrightarrow k < \dfrac{23}{3} \Leftrightarrow k \le 7$.

  Như vậy $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_8$.

- $a_{k+1} < a_k \Leftrightarrow C_{12}^{k+1} 2^{k+1} < C_{12}^k 2^k \Leftrightarrow \dfrac{2}{k+1} < \dfrac{1}{12-k} \Leftrightarrow k > \dfrac{23}{3} \Leftrightarrow k \ge 8$.

  Như vậy $a_8 > a_9 > a_{10} > ... > a_{12}$.

Vậy hệ số có giá trị lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8 = 126720$.

Ví dụ 5: Cho biểu thức $P(x) = (x+2)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Biết $a_{n-9} > a_{n-8}$ và $a_{n-9} > a_{n-10}$. Tìm giá trị của n?

Lời giải

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x+2)^n = C_n^0 x^n 2^0 + C_n^1 x^{n-1} 2^1 + ... + C_n^{n-k} x^k 2^{n-k} + ... + C_n^{n-1} x^1 2^{n-1} + C_n^n x^0 2^n, n \in \mathbb{N}^*$$

Mà $P(x) = (x+2)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $a_k = 2^{n-k} C_n^{n-k} = 2^{n-k} C_n^k$, $0 \le k \le n \Rightarrow a_{n-8} = 2^8 C_n^{n-8} = 2^8 C_n^8$, $a_{n-9} = 2^9 C_n^9$, $a_{n-10} = 2^{10} C_n^{10}$

Theo đề bài với $n \ge 10$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a_{n-9} > a_{n-8} \\ a_{n-9} > a_{n-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^9 \dfrac{n!}{9!(n-9)!} > 2^8 \dfrac{n!}{8!(n-8)!} \\ 2^9 \dfrac{n!}{9!(n-9)!} > 2^{10} \dfrac{n!}{10!(n-10)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{9} > \dfrac{1}{n-8} \\ \dfrac{1}{n-9} > \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \dfrac{25}{2} \\ n < 14 \end{cases} \Leftrightarrow n = 13.$$

Ví dụ 6: Cho $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Biết $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

$$(1+2x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . 2^k . x^k = C_n^0 . 2^0 x^0 + C_n^1 . 2^1 x^1 + C_n^2 . 2^2 x^2 + ... + C_n^n . 2^n x^n = a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n.$$

Ta có $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Ta có $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k . 2^k < C_{12}^{k+1} . 2^{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k < 2C_{12}^{k+1}$. Suy ra: $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_8$.

Mặt khác $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k . 2^k > C_{12}^{k+1} . 2^{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k > 2C_{12}^{k+1}$. Suy ra: $a_8 > a_9 > a_{10} > ... > a_{12}$.

Vậy số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ là $a_8 = C_{12}^8.2^8 = 126720$.

Ví dụ 7: Cho khai triển $(x+3)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và a_0, a_1, a_2, ..., a_n là các số thực. Gọi S là tập hợp chứa các số tự nhiên n để a_{10} là số lớn nhất trong các số a_0, a_1, a_2, ..., a_n. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có khai triển $(x+3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{n-k} x^k$.

Số hạng tổng quát của khai triển là $T_k = C_n^k 3^{n-k} x^k$. Suy ra hệ số của T_k là $a_k = C_n^k 3^{n-k}$.

Để a_{10} là số lớn nhất trong các số a_0, a_1, a_2, ..., a_n thì:

$$\begin{cases} a_{10} \ge a_9 \\ a_{10} \ge a_{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10}.3^{n-10} \ge C_n^9.3^{n-9} \\ C_n^{10}.3^{n-10} \ge C_n^{11}.3^{n-11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10} \ge 3C_n^9 \\ 3C_n^{10} \ge C_n^{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \ge 39 \\ n \le 43 \end{cases} \Leftrightarrow 39 \le n \le 43.$$

Vậy $S = \{39;40;41;42;43\}$.

Tổng các phần tử của S là $T = 39+40+41+42+43 = 205$.

3. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TRONG CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP.

ĐẠO HÀM CẤP 1.

Dấu hiệu sử dụng

Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ 1,2,3,…,n hay n,…,3,2,1 tức là số hạng đó có dạng kC_n^k hoặc $kC_n^k a^{n-k} b^{k-1}$ thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 để tính. Cụ thể:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + 2C_n^1 a^{n-1} x + ... + nC_n^n a x^n$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$n(a+x)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} + 2C_n^2 a^{n-2} + ... + nC_n^n a x^{n-1} \; (1)$$

Đến đây thay x, a bằng hằng số thích hợp ta được tổng cần tìm.

Trên đây là dấu hiệu nhận biết và phương pháp làm dạng này. Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu kỹ hơn qua các bài toán của dạng này!

Ví dụ 1: Tính tổng $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + ... + (-1)^{n-1} nC_n^n$

Lời giải

Ta thấy tổng cần tính có dạng như $VP(1)$. Việc còn lại chỉ cần chọn $a = 1, x = -1$ ta tính được tổng bằng 0.

Cách khác. Sử dụng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta tính được tổng bằng:

$$nC_{n-1}^0 - nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + ... + (-1)^{n-1} nC_{n-1}^{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0$$

Ví dụ 2: Tính tổng $2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+...+C_{2007}^{2007}$

Lời giải

Hệ số trước tổ hợp giảm dần từ 2008,2007,…,1 nên dùng đạo hàm là điều dễ hiểu:

$$(x+1)^{2007}=C_{2007}^{0}x^{2007}+C_{2007}^{1}x^{2006}+...+C_{2007}^{2007}$$

Bây giờ nếu đạo lấy đạo hàm thì chỉ được $2007C_{2007}^{0}x^{2006}$ trong khi đó đề đến 2008 do đó ta phải nhân thêm với x vào đẳng thức trên rồi mới dùng đạo hàm:

$$x(x+1)^{2007}=C_{2007}^{0}x^{2008}+C_{2007}^{1}x^{2007}+...+C_{2007}^{2007}x$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^{2006}(2008x+1)=2008C_{2007}^{0}x^{2007}+2007C_{2007}^{1}x^{2006}+...+C_{2007}^{2007}$$

Thay $x=1$ vào ta tìm được tổng là 2009.2^{2006}

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $(x+2)^{n}=1.2^{n-1}C_{n}^{2}+2.2^{n-2}C_{n}^{2}+...+nC_{n}^{n}=n3^{n-1},\forall n\le 1\in\mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có $(x+2)^{n}=C_{n}^{0}2^{n}+C_{n}^{1}2^{n-1}x+C_{n}^{2}2^{n-2}x^{2}+...+C_{n}^{n}x^{n}$

Đạo hàm 2 vế theo biến x ta được $n(x+2)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_{n}^{k}kx^{k}$

Cho $x=1\Rightarrow n.3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_{n}^{k}k$, điều phải chứng minh !

Ví dụ 4: Tính tổng $S=n2^{n-1}C_{n}^{0}+(n-1)2^{n-2}.3.C_{n}^{1}+(n-2)2^{n-3}.3^{2}.C_{n}^{2}+...+3^{n-1}C_{n}^{n-1}$

Lời giải

Nhận thấy hệ số đứng trước tổ hợp giảm dần $n,n-1,...,3,2,1$ nên phải hoán đổi vị trí a và x . Xét khai triển $(x+a)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}x^{n-k}a^{k}$

Đạo hàm theo biến x ta được $n(x+a)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}(n-k)C_{n}^{k}x^{n-k-1}a^{k}$

Thay $x=2,a=3$ ta được $S=n.5^{n-1}$.

Cách 2. Ta sẽ sử dụng tới 2 đẳng thức $C_{n}^{n-k}=C_{n}^{k},kC_{n}^{k}=nC_{n-1}^{k-1}$ ta có

$$S=n2^{n-1}C_{n}^{n}+(n-1)2^{n-2}.3.C_{n}^{n-1}+(n-2)2^{n-3}3^{2}C_{n}^{n-2}+...+3^{n-1}C_{n}^{1}$$
$$=n2^{n-1}C_{n-1}^{n-1}+n.2^{n-2}.3.C_{n-1}^{n-2}+n2^{n-3}3^{2}C_{n-1}^{n-3}+...+n.3^{n-1}C_{n-1}^{0}$$
$$=n\left(2^{n-1}C_{n-1}^{n-1}+2^{n-2}.3.C_{n-1}^{n-2}+2^{n-3}3^{2}C_{n-1}^{n-3}+...+3^{n-1}C_{n-1}^{0}\right)=n(2+3)^{n-1}=n.5^{n-1}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+3C_{n}^{2}+...+(p+1)C_{n}^{p}+...+(n+1)C_{n}^{n}=(n+2)2^{n-1}$

Lời giải

Ta nhận thấy rằng nếu xét khai triển tổng quát thì các hệ số bị lệch đi 1 đơn vị, do đó để xử lý được ta sẽ nhân thêm vào 2 vế đại lượng x, xét khai triển $x(x+1)^{n}$ ta được

$$x(x+1)^n = x.\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \Rightarrow (x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Cho $x=1$ ta có điều phải chứng minh !

Ví dụ 6: Tính tổng $S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + ... + (n+3)C_n^n$?

Lời giải

Nhận thấy rằng với $x=1$ thì ta có $\begin{cases} 3C_n^0 = (C_n^0 x^3)' \\ 4C_n^1 = (C_n^1 x^4)' \\ .... \\ (n+3)C_n^0 = (C_n^n x^{n+3})' \end{cases}$

$$\Rightarrow C_n^0 x^3 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + ... + (n+3)C_n^n x^{n+3} = x^3 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right) = x^3 (x+1)^n \ (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3(x+1)^n \Rightarrow f'(x) = 3x^2(x+1)^n + nx^3(x+1)^{n-1}$

Kết hợp với $(*)$ ta có $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 C_n^0 + 4x^3 C_n^1 + C_n^2 5x^4 + ... + (n+3)x^{n+2} C_n^n$

Chọn $x=1$ thì $S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + ... + (n+3)C_n^n = 3.2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(n+6)$

Ví dụ 7: Cho số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức tổ hợp $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 512$.

Tính tổng $S = 2^2 C_n^2 - 3^2 C_n^3 + \cdots + (-1)^n .n^2 .C_n^n$.

Lời giải

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 .x + C_{2n}^2 .x^2 + C_{2n}^3 .x^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} .x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} .x^{2n}$ (1).

Thay $x=1$ vào (1) ta có: $2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ (2).

Thay $x=-1$ vào (1) ta có: $0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ (3).

Trừ từng vế của (2) và (3) ta có:

$$2^{2n} = 2.\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}\right) \Leftrightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Nên $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 512 \Leftrightarrow 2^{2n-1} = 2^9 \Leftrightarrow 2n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 5$.

Bởi vậy $S = 2^2 C_5^2 - 3^2 C_5^3 + 4^2 C_5^4 - 5^2 .C_5^5$.

Từ $(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 .x + C_5^2 .x^2 + C_5^3 .x^3 + C_5^4 .x^4 + C_5^5 .x^5$, lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$5(1+x)^4 = C_5^1 + 2C_5^2 .x + 3C_5^3 .x^2 + 4C_5^4 .x^3 + 5C_5^5 .x^4$$

$$\Rightarrow 5x(1+x)^4 = C_5^1 x + 2C_5^2 .x^2 + 3C_5^3 .x^3 + 4C_5^4 .x^4 + 5C_5^5 .x^5 \ (4).$$

Lại lấy đạo hàm hai vế (4), ta có:

$$5(1+x)^4 + 20x(1+x)^3 = C_5^1 + 2^2 C_5^2 .x + 3^2 C_5^3 .x^2 + 4^2 C_5^4 .x^3 + 5^2 C_5^5 .x^4 \ (5).$$

Thay $x=-1$ vào (5) ta được:

$$0 = C_5^1 - 2C_5^2 + 3^2 C_5^3 - 4^2 C_5^4 + 5^2 C_5^5 \Leftrightarrow 2C_5^2 - 3^2 C_5^3 + 4^2 C_5^4 - 5^2 C_5^5 = C_5^1$$

Hay $S = 2^2 C_5^2 - 3^2 C_5^3 + 4^2 C_5^4 - 5^2 .C_5^5 = 5$.

Ví dụ 8: Tính tổng $S=2.2^{2017}C_{2018}^{1}+3.2^{2016}C_{2018}^{2}+4.2^{2015}C_{2018}^{3}+...+2019C_{2018}^{2018}$.

Lời giải

Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$(2+x)^{2018}=C_{2018}^{0}.2^{2018}+C_{2018}^{1}.2^{2017}.x+C_{2018}^{2}.2^{2016}.x^2+...+C_{2018}^{2018}.x^{2018}$$

$$\Leftrightarrow x(2+x)^{2018}=C_{2018}^{0}.2^{2018}.x+C_{2018}^{1}.2^{2017}.x^2+C_{2018}^{2}.2^{2016}.x^3+...+C_{2018}^{2018}.x^{2019}$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế ta được:

$$(2+x)^{2018}+x.2018.(2+x)^{2017}=C_{2018}^{0}.2^{2018}+2.C_{2018}^{1}.2^{2017}.x+3.C_{2018}^{2}.2^{2016}.x^2+...+2019.C_{2018}^{2018}.x^{2018}$$

Cho $x=1$ ta được $3^{2018}+2018.3^{2017}=C_{2018}^{0}.2^{2018}+2.C_{2018}^{1}.2^{2017}+3.C_{2018}^{2}.2^{2016}+...+2019.C_{2018}^{2018}$

$$\Rightarrow S=3^{2018}+2018.3^{2017}-C_{2018}^{0}.2^{2018}=2021.3^{2017}-2^{2018}.$$

Ví dụ 9: Tính tổng $S=\frac{1}{2017}\left(2.3C_{2017}^{2}+3.3^2C_{2017}^{3}+4.3^3C_{2017}^{4}+\cdots+2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}\right)$.

Lời giải

Xét khai triển: $P(x)=(1+x)^{2017}=C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}x+C_{2017}^{2}x^2+C_{2017}^{3}x^3+C_{2017}^{4}x^4+\cdots+C_{2017}^{2017}x^{2017}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$2017(1+x)^{2016}=C_{2017}^{1}+2C_{2017}^{2}x+3C_{2017}^{3}x^2+4C_{2017}^{4}x^3+\cdots+2017C_{2017}^{2017}x^{2016}.$$

Cho $x=3$ ta được $2017.4^{2016}=C_{2017}^{1}+2.3C_{2017}^{2}+3.3^2C_{2017}^{3}+4.3^3C_{2017}^{4}+\cdots+2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}$.

$\Leftrightarrow 2017.4^{2016}-C_{2017}^{1}=2.3C_{2017}^{2}+3.3^2C_{2017}^{3}+4.3^3C_{2017}^{4}+\cdots+2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2017}\left(2017.4^{2016}-2017\right)=\frac{1}{2017}\left(2.3C_{2017}^{2}+3.3^2C_{2017}^{3}+4.3^3C_{2017}^{4}+\cdots+2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}\right)$.

$\Leftrightarrow 4^{2016}-1=S$.

Ví dụ 10: Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n=2621439$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $x(1+x)^n=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+...+C_n^nx^{n+1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$(x+1)^n+nx(x+1)^{n-1}=C_n^0+2C_n^1x+3C_n^2x^2+...+(n+1)C_n^nx^n.$$

Cho $x=1$, ta có $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n=2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}(2+n)$.

$$\Rightarrow 2^{n-1}(2+n)-1=2621439\Leftrightarrow 2^{n-1}(2+n)=2621440\Leftrightarrow 2^n=\frac{2621440}{2+n}.2.\ (*)$$

Xét $f(n)=2^n$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $g(n)=2.\frac{2621440}{2+n}$ là hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Ta có $f(18)=g(18)\Rightarrow n=18$ là nghiệm duy nhất của (*).

Khi đó số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{18}$ là $C_{18}^k x^{36-3k}$ với $k\in\mathbb{Z}, 0\le k\le 18$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{18}^{12}=18564$.

ĐẠO HÀM CẤP 2.

Dấu hiệu sử dụng.

Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng $1.2, 2.3, ..., (n-1)n$ hay $(n-1)n, ..., 3.2, 2.1$ hay $1^2, 2^2, ..., n^2$ tức có dạng $k(k-1)C_n^k a^{n-k}$ hay tổng quát hơn $k(k-1)C_n^k a^{n-k}b^k$ thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính. Xét đa thức

$$(a+bx)^n=C_n^0+C_n^1a^{n-1}bx+...+C_n^nb^nx^n$$

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$bn(a+bx)^{n-1}=C_n^1a^{n-1}b+2C_n^2a^{n-2}b^2x...+nC_n^nb^nx^{n-1}$$

Đạo hàm lần nữa:

$$b^2n(n-1)(a+bx^{n-2})=2.1C_n^2a^{n-2}b^2+...+n(n-1)C_n^nb^nx^{n-1}\ (2)$$

Đến đây ta gần như giải quyết xong ví dụ toán chỉ việc thay a,b,x bởi các hằng số thích hợp nữa thôi.

Sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ minh họa để hiểu rõ hơn phương pháp!

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=(1+x)^n, (2\le n\le\mathbb{Z})$

a) Tính $f''(1)$

b) Chứng minh rằng $2.1C_n^2+3.2C_n^3+...+(n-1)nC_n^n=n(n-1)2^{n-2}$

Lời giải

a) Ta có $f''(x)=n(1+x)^{n-1}\Rightarrow f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\Rightarrow f''(1)=n(1+x)^{n-2}$

b) Ta có khai triển

$$f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^kx^k=C_n^0+C_n^1x+\sum_{k=2}^{n}C_n^kx^k\Rightarrow f'(x)=C_n^1+\sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kx^{k-2}\Rightarrow f''(1)=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k=2^{n-2}$$

$$\Rightarrow 2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(p+1)C_n^p+...+(n+1)nC_n^n=n(n+1)2^{2n-1}$$

Từ câu b) thay $n-1=n+1$ thì ta có một bài toán khác:

Chứng minh rằng. $2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(n+1)pC_n^p+...+(n+1)nC_n^n=n(n+1)2^{n-2}$

Với bài toán này ta giải như sau:

Xét nhị thức $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+...+C_n^nx^n$

Nhân 2 vế của đẳng thức với $x\ne 0$ đồng thời lấy đạo hàm cấp 2 hai vế theo biến x ta được

$$2n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=2C_n^1x+3.2C_n^2x+...+(n+1)nC_n^nx^{n-1}$$

Cho $x=2$ ta được điều phải chứng minh!

Ví dụ 2: Rút gọn tổng sau $S=1^2C_{2009}^{1}2^{2008}+2^2C_{2009}^{2}2^{2007}+3^2C_{2009}^{3}2^{2006}+...+2009^2C_{2009}^{2009}$

Lời giải

Với ý tưởng như bài trên ta xét đa thức

$$(x+2)^{2009}=C_{2009}^{0}2^{2009}+C_{2009}^{1}2^{2008}x+C_{2009}^{2}2^{2007}x^2+...+C_{2009}^{2009}x^{2009}$$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được $2.2009(x+2)^{2008}=1C_{2009}^{1}2^{2008}+2C_{2009}^{2}2^{2007}x+...+2009C_{2009}^{2009}x^{2008}$

Nếu ta tiếp tục đạo hàm lần nữa thì chỉ thu được 1.2, 2.3 ,… do đó để thu được $2^2,3^2,...$ ta phải nhân thêm hai vế với x rồi mới lấy đạo hàm, ta có

$$2009x(x+2)^{2008}=1C_{2009}^{1}2^{2008}x+2C_{2009}^{2}2^{2007}x^2+...+2009C_{2009}^{2009}x^{2009}$$

$$\Rightarrow 2009(x+2)^{2008}+2009.2008x(x+2)^{2007}=1^2C_{2009}^{1}2^{2008}+2^2C_{2009}^{2}2^{2007}x+...+2009^2C_{2009}^{2009}x^{2008}$$

Thay $x=1$ rút gọn tổng trên ta được $2011.2009.3^{2007}$.

Tương tự khi tính tổng $2.1C_n^1+3.2C_n^2+4.3C_n^3+...+(n+1)nC_n^n$ ta cần chú ý là trước tổ hợp có một hệ số lớn hơn k trong C_n^k nên ta phải nhân với x trước khi đạo hàm 2 lần.

4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP.

Dấu hiệu sử dụng.

Ý tưởng của phương pháp này là dựa vào hệ thức $\int_a^b x^k dx=\left.\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\right|_a^b=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}$

Từ đấy dễ dàng tìm được dấu hiệu để sử dụng phương pháp này là số hạng của tổng có dạng $\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}C_n^k$. Cụ thể xét tích phân $I=\int_a^b (c+dx)^n dx$ ta có thể tính bằng 2 cách.

- Tính trực tiếp $I=\frac{1}{d}\int_a^b (c+dx)^n d(c+dx)=\left.\frac{1}{d}\frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$
- Tính gián tiếp $I=\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kc^{n-k}d^kx^k\right)dx=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^kc^{n-k}d^k\int_a^b x^kdx\right)$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^kc^{n-k}d^k\left.\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\right|_a^b\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^kc^{n-k}d^k\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}\right)$$

Hai cách trên là như nhau nên từ đó ta có được

$$\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^kc^{n-k}d^k\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}\right)=\left.\frac{1}{d}\frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$$

Tùy từng bài toán ta chọn các hệ số a, b, c, d thích hợp!

Để dễ dàng nhận biết hơn thì ta có thể chú ý như sau:

Nếu trong tổng dãy tổ hợp, các số hạng chứa các phân số $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n}$ và mẫu số được xếp theo thứ tự tăng hoặc giảm đều theo một quy luật nào đó, ta nghĩ ngay đến việc sử

dụng tích phân. Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1: Tìm hàm để tính tích phân với các cận thích hợp.
- Bước 2: Tính tích phân trong cả hai vế: vế chưa khai triển nhị thức Newton và vế đã khai triển.
- Bước 3: Cho hai kết quả bằng nhau và kết luận.

Trước khi vào các bài toán cụ thể ta cần nhớ các đẳng thức tích phân sau:

1. $\int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b \left(C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + C_n^n x^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left.\left(xC_n^0 + C_n^1\frac{x^2}{2} + ... + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_a^b$$

2. $\int_a^b (1-x)^n dx = \int_a^b \left(C_n^0 - xC_n^1 + x^2C_n^2 - ...(-1)^n C_n^n x^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left.\left(xC_n^0 - C_n^1\frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_a^b$$

3. $\int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b \left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left.\left(C_n^0\frac{x^{n+1}}{n+1} + C_n^1\frac{x^n}{n} + C_n^2\frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + C_n^n x\right)\right|_a^b$$

4. $\int_a^b (x-1)^n dx = \int_a^b \left(C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - ... + (-1)^n C_n^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left.\left(C_n^0\frac{x^{n+1}}{n+1} - C_n^1\frac{x^n}{n} + C_n^2\frac{x^{n-1}}{n-1} - ... + (-1)^n C_n^n x\right)\right|_a^b$$

Ví dụ 1: Tính tổng $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n \ (n \ge 1)$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, mẫu số được xếp theo thứ tự tăng đều mộtđơn vị, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Bây giờ, ta suy nghĩ hàm lấy tích phân, các cận và số được thay vào cho biến. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ nên ta biết cận từ 1 đến 2 và tổng không đan dấu nên ta sử dụng $\int_1^2 (1+x)^n dx$.

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_1^2 (x+1)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + C_n^n x^n\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \left.\left(xC_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right)\right|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}=C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n=S$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Tổng không đan dấu, ta sử dụng $\int_0^1 (x+1)^n\,dx$

Xét khai triển $(x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+\ldots+x^2C_n^n$

Ta có:

- $\int_0^1 (x+1)^n\,dx=\left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$
- $\int_0^1\left(C_n^0+xC_n^1+\ldots+x^nC_n^n\right)dx=\left.\left(xC_n^0+\frac{1}{2}x^2C_n^1+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+}\right)\right|_0^1$

  $=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Chứng minh rằng $2C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1 2^2+\frac{1}{3}C_n^2 2^3-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(1+(-1)^n\right)$

Hướng dẫn. Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ nên ta biết cận từ 0 đến 2 và tổng đan dấu nên ta sử dụng $\int_0^2 (1-x)^n\,dx$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^1+\frac{2}{3}C_n^2+\frac{3}{4}C_n^3+\ldots+\frac{n}{n+1}C_n^n=\frac{(n-1)2^n+1}{n+1}$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{n}{n+1}$ nên ta không thể nghĩ ra ngay một hàm số nào đó để tính tích phân. Bằng cách phân tích số hạng tổng quát $\frac{k}{k+1}C_n^k=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)C_n^k$, cho ta tổng sau:

$$\left(C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n\right)$$

Từ đó sử dụng $2^n-\int_0^1 (x+1)^n\,dx$

Cách 1. Xét số hạng tổng quát trong vế trái $\frac{k}{k+1}C_n^k=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)C_n^k\ \left(k=\overline{0,n}\right)$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{2}C_n^1+\frac{2}{3}C_n^2+\frac{3}{4}C_n^3+...+\frac{n}{n+1}C_n^n=\left(C_n^1+C_n^2+C_n^3+...+C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n\right)$$

$$=2^n-\int_0^1(x+1)^n dx=2^n-\frac{2^{n+1}-1}{n+1}=\frac{(n-1)2^n+1}{n+1}$$

Cách 2. Xét khai triển $(x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^nC_n^n$.

Lấy đạo hàm 2 vế ta được $n(x+1)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1}$

Ta có:

- $\int_0^1 nx(x+1)^{n-1}dx=\int_0^1\left(n(1+x-1)(x+1)^{n-1}\right)dx=n\int_0^1\left((x+1)^n-(x+1)^{n-1}\right)dx$

  $=n\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(x+1)^n}{n}\right]\Bigg|_0^1=\frac{n}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)-\left(2^n-1\right)=\frac{(n-1)2^n+1}{n+1}$

- $\int_0^1\left(C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1}\right)dx=\frac{1}{2}C_n^1+\frac{2}{3}C_n^2+...+\frac{n}{n+1}C_n^n$

Từ 2 điều trên ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

Lời giải

Xét các khai triển $\begin{cases}(x+1)^{2n}=C_{2n}^0+xC_{2n}^1+x^2C_{2n}^2+...+x^{2n}C_{2n}^{2n}\\(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-xC_{2n}^1+x^2C_{2n}^2-...+x^{2n}C_{2n}^{2n}\end{cases}$

Trừ 2 vế đẳng thức trên ta được:

$$(x+1)^{2n}-(1-x)^{2n}=2\left(xC_{2n}^1+x^3C_{2n}^3+...+x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{(x+1)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int_0^1\left(xC_{2n}^1+x^3C_{2n}^3+...+x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\Bigg|_0^1=\left(\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2+\frac{1}{4}C_{2n}^3x^4+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}x^{2n}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$

Nhận xét. Nếu phải tính tổng $C_{2n}^0+\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{5}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$ thì ta xét

$$P(x)=\frac{(x+1)^{2n}+(1-x)^{2n}}{2}=C_{2n}^0+x^2C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1 P(x)dx$.

Còn nếu phải tính tổng $\frac{1}{2}C_{2n}^0+\frac{1}{4}C_{2n}^2+\frac{1}{6}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}$ thì ta xét

$$G(x)=xP(x)=C_{2n}^0x+C_{2n}^2x^3+...+C_{2n}^{2n}x^{2n+1}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1 G(x)dx$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{2}{5}C_{2n}^4 + ... + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}(n \ge 1)$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{2n} = C_{2n}^0 + xC_{2n}^1 + ... + x^{2n}C_{2n}^{2n}$

Ta có:

- $\int_{-1}^1 (x+1)^{2n} dx = \left.\frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1}\right|_{-1}^1 = \frac{2^{2n+1}}{n+1}$
- $\int_{-1}^1 \left(C_{2n}^0 + xC_{2n}^1 + ... + x^{2n}C_{2n}^{2n}\right)dx = \left.\left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2}C_{2n}^1 x^2 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\right|_{-1}^1$

$= 2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + ... + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n}$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 6: Cho tích phân $\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}(n \ge 2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3(n+1)}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

Lời giải

Xét $I = \int_0^1 x^2\left(C_n^0 + x^3C_n^1 + C_n^2x^6 + ... + C_n^n x^{3n}\right)dx$

$= \int_0^1 \left(C_n^0 x^2 + C_n^1 x^5 + ... + C_n^n x^{3n+2}\right)dx$

$= \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3(n+1)}C_n^n$

Mặt khác $\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}(n \ge 2)$ vậy ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2(n+1)}$

2. Chứng minh rằng $1 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{\prod_{i=1}^n 2i}{\prod_{i=1}^n (2i+1)}$

Chú ý. Khi bài toán cho mà số hạng tổng quát không phải là $\frac{1}{k+1}C_n^k$ mà là $\frac{1}{k+2}C_n^k$ thì ta cần phải nhân thêm x vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân, còn nếu là $\frac{1}{k+3}C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x^2 vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân,…

Sau đây ta sẽ cùng hiểu rõ hơn qua ví dụ sau.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+...+\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{n\left(2^{n+1}+1\right)}{(n+1)(n+2)}(n\ge 1)$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{1}{k+2}C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x vào hàm số cơ bản trước khi tính tích phân. Khi đó, ta sử dụng $\int_0^1 x(x+1)^n\,dx$.

Ta có

- $\int_0^1 x(x+1)^n\,dx=\int_0^1(x+1)^{n+1}\,dx-\int_0^1(x+1)^n\,dx=\left(\frac{(x+1)^{n+2}}{n+2}-\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1=\frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$
- $\int_0^1 x(x+1)^n\,dx=\int_0^1 x\left(C_n^0+xC_n^1+...+x^nC_n^n\right)dx=\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+...+\frac{1}{n+2}C_n^n$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-...+\frac{(-1)^nC_n^n}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Ví dụ 8: Giả sử số tự nhiên $n\ge 2$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây hãy tìm n?

$$C_{2n}^0+\frac{C_{2n}^2}{3}+\frac{C_{2n}^4}{5}+\frac{C_{2n}^6}{7}+...+\frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1}=\frac{4096}{13}$$

Lời giải

Giả sử số tự nhiên $n\ge 2$ thỏa mãn $C_{2n}^0+\frac{C_{2n}^2}{3}+\frac{C_{2n}^4}{5}+\frac{C_{2n}^6}{7}+...+\frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1}=\frac{8192}{15}$.

Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1(1+x)^{2n}\,dx=\left(C_{2n}^0x+\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2+\frac{1}{3}C_{2n}^2x^3+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^1=\left(C_{2n}^0x+\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2+\frac{1}{3}C_{2n}^2x^3+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(2^{2n+1}-1\right)}{2n+1}=2C_{2n}^0+\frac{2}{2}C_{2n}^1+\frac{2}{3}C_{2n}^2+...+\frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n}\ (1)$$

Mặt khác $\int_0^{-1}(1+x)^{2n}dx=\left(C_{2n}^0x+\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2+\frac{1}{3}C_{2n}^2x^3+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^{-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2n+1}=-2C_{2n}^0+\frac{2}{2}C_{2n}^1-\frac{2}{3}C_{2n}^2+...+\frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n}\ (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1}=2\left(C_{2n}^0+\frac{C_{2n}^1}{3}+\frac{C_{2n}^4}{5}+\frac{C_{2n}^6}{7}+...+\frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)\Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1}=2.\frac{4096}{13}\Leftrightarrow n=6.$$

Ví dụ 9: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có:

$$\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(k+2)}=\frac{(n+2)!}{(n-k)!(k+2)!(n+1)(n+2)}=\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Suy ra $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+C_{n+2}^4+...+C_{n+2}^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\quad (*).$$

Ta xét khai triển sau: $(1+x)^{n+2}=C_{n+2}^0+x.C_{n+2}^1+x^2.C_{n+2}^2+x^3.C_{n+2}^3+...+x^{n+2}.C_{n+2}^{n+2}$.

Chọn $x=1\Rightarrow 2^{n+2}=C_{n+2}^0+C_{n+2}^1+C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+...+C_{n+2}^{n+2}$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow \frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n+2}-C_{n+2}^0-C_{n+2}^1}{(n+1)(n+2)}\Leftrightarrow 2^{100}=2^{n+2}\Leftrightarrow n=98$.

Cách 2. Ta có:

$$S=\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)C_n^0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)C_n^1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)C_n^2+.....+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)C_n^n$$

$$=\left(\frac{1}{1}C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....\frac{1}{n+1}C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+.....\frac{1}{n+2}C_n^n\right)$$

Lại có $\int_0^1(1+x)^ndx-\int_0^1x(1+x)^ndx=\int_0^1 2(1+x)^ndx-\int_0^1(1+x)^{n+1}dx$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1}C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....\frac{1}{n+1}C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+.....\frac{1}{n+2}C_n^n\right)$$

$$=\frac{2}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1-\frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2}\Big|_0^1\Rightarrow S=\frac{2.2^{n+1}-2}{n+1}-\frac{2^{n+2}-1}{n+2}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$$

Ví dụ 10: Tính tổng $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n.nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$

Lời giải

Số hạng tổng quát $a_k=\frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)}=(-1)^k C_n^k\left(\frac{2}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)=(-1)^k\frac{2C_n^k}{k+2}+(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}$

$$\Rightarrow S=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\frac{2C_n^k}{k+2}+(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}\right)=2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{k+2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}$$

Xét khai triển $(x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+...+x^nC_n^n$

$\Rightarrow \int_{-1}^{0}(x+1)^n dx=\int_{-1}^{0}\left(C_n^0+xC_n^1+...+x^nC_n^n\right)dx$

$\Rightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{0}=\left.\left(\frac{xC_n^0}{1}+\frac{x^2C_n^1}{2}+...+\frac{x^{n+1}C_n^n}{n+1}\right)\right|_{-1}^{0}$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}$

Tương tự ta có $x(x+1)^n=xC_n^0+x^2C_n^1+...+x^{n+1}C_n^n$

$\Rightarrow \int_{-1}^{0}x(x+1)^n dx=\int_{-1}^{0}\left(xC_n^0+x^2C_n^1+...+x^{n+1}C_n^n\right)dx$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{k+2}$

Vậy $S=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{n+1}=-\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

5. ỨNG DỤNG SỐ PHỨC CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP.

Các tính chất của số phức được sử dụng trong phần này

- Hai số phức $z=x+iy, w=x'+iy'$ bằng nhau khi và chỉ khi $x=x', y=y'$
- Công thức Moive $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\Rightarrow z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$
- Giải phương trình $x^3-1=0$. Ta được nghiệm là $x_1=1; x_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}; x_3=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

  Các nghiệm đó chính là các căn bậc ba của 1.

  Đặt $a=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a^2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ và a có các tính chất sau:

  1. $a+a^2=-1$
  2. $a^3=1$
  3. $a^{3k}=1$
  4. $a^{3k+1}=a$
  5. $a^{3k+2}=a^2$

Ý tưởng của phương pháp này dựa trên các tính chất của số ảo i.

$$i^{4k}=1,i^{4k+1}=i,i^{4k+2}=-1,i^{4k+3}=-i,k\in\mathbb{N}$$

Từ đó, ta xét đa thức $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

Đặt $S_0=\sum_{i=4k}a_i,S_1=\sum_{i=4k+1}a_i,S_2=\sum_{i=4k+2}a_i,S_3=\sum_{i=4k+3}a_i$

Ta có $\begin{cases}f(1)=(S_0+S_2)+(S_1+S_3)\\ f(-1)=(S_0+S_2)-(S_1+S_3)\\ f(i)=(S_0-S_2)+(S_1-S_3)i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S_0=\dfrac{f(1)+f(-1)+2\operatorname{Re}(f(i))}{4}\\ S_1=\dfrac{f(1)-f(-1)+2\operatorname{Im}(f(i))}{4}\\ S_2=\dfrac{f(1)+f(-1)-2\operatorname{Re}(f(i))}{4}\\ S_3=\dfrac{f(1)-f(-1)-2\operatorname{Im}(f(i))}{4}\end{cases}$

Với $\operatorname{Re}(f(i)),\operatorname{Im}(f(i))$ lần lượt là phần thực và phần ảo của $f(i)$

Dấu hiệu

Đây là vấn đề lớn nhất cần chú ý . Ta dùng số phức để tính tổng của các C_n^k khi tổng này có hai đặc điểm:

- Các dấu trong tổng xen kẽ đều nhau .
- k luôn lẻ, hoặc luôn chẵn hoặc khi chia k cho một số ta luôn được cùng một số dư (trong chương trình phổ thông ta chỉ làm với $k=3n,k=3n+1,k=3n+2$)

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu phương pháp này qua các ví dụ sau.

Dạng 1: Khai triển $(x+1)^n$, cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp hoặc khai triển trực tiếp các số phức

Ví dụ 1 : Tính tổng

$A=C_{2009}^0-C_{2009}^2+C_{2009}^4-...+C_{2009}^{2008}$

$B=-C_{2009}^1+C_{2009}^3-C_{2009}^5+...-C_{2009}^{2009}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{2009}=C_{2009}^0+xC_{2009}^1+x^2C_{2009}^2+...+x^{2009}C_{2009}^{2009}$

Cho $x=-i$ ta có:

$$(1-i)^{2009}=C_{2009}^0+iC_{2009}^1+i^2C_{2009}^2+...i^{2009}C_{2009}^{2009}$$
$$=\left(C_{2009}^0-C_{2009}^2+C_{2009}^4-...+C_{2009}^{2008}\right)+\left(-C_{2009}^1+C_{2009}^3-C_{2009}^5+...-C_{2009}^{2009}\right)i$$

Mặt khác $(1-i)^{2009}=\left(\sqrt{2}\right)^{2009}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{2009}=\left(\sqrt{2}\right)^{2009}\left(\cos\dfrac{2009\pi}{4}-i\sin\dfrac{2009\pi}{4}\right)$

$=\left(\sqrt{2}\right)^{2009}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=2^{1004}-i2^{1004}$

So sánh phần thực và phần ảo của $(1-i)^{2009}$ trong hai cách tính trên ta được:

- $A=C_{2009}^0-C_{2009}^2+C_{2009}^4-...+C_{2009}^{2008}=2^{1004}$
- $B=-C_{2009}^1+C_{2009}^3-C_{2009}^5+...-C_{2009}^{2009}=-2^{1004}$

Ví dụ 2 : Tính tổng $S=\frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^{0}-3C_{50}^{2}+3^{2}C_{50}^{4}-...+3^{24}C_{50}^{48}-3^{25}C_{50}^{50}\right)$

Lời giải

Xét khai triển $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50}=\frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^{0}-\left(i\sqrt{3}\right)C_{50}^{1}+\left(i\sqrt{3}\right)^{2}C_{50}^{2}+...-\left(i\sqrt{3}\right)^{49}C_{50}^{49}+\left(i\sqrt{3}\right)^{50}C_{50}^{50}\right)$

$=\frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^{0}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}C_{50}^{2}+...-\left(\sqrt{3}\right)^{50}C_{50}^{50}\right)+\frac{1}{2^{50}}\left(-\sqrt{3}C_{50}^{1}+\left(\sqrt{3}\right)^{3}C_{50}^{3}-...-\left(\sqrt{3}\right)^{49}C_{50}^{49}\right)i$

Mặt khác $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{50}=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{50}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

So sánh phần thực của $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$ trong hai cách tính trên ta được:

$$S=\frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^{0}-3C_{50}^{2}+3^{2}C_{50}^{4}-...+3^{24}C_{50}^{48}-3^{25}C_{50}^{50}\right)=-\frac{1}{2}$$

Ví dụ 3 : Tính tổng $S=3^{10}C_{20}^{0}-3^{9}C_{20}^{2}+3^{8}C_{20}^{4}-3^{7}C_{20}^{6}+...-3C_{20}^{18}+C_{20}^{20}$

Lời giải

Xét khai triển $\left(i+\sqrt{3}\right)^{20}=\left(\sqrt{3}\right)^{20}C_{20}^{0}+i\left(\sqrt{3}\right)^{19}C_{20}^{1}-...-i\sqrt{3}C_{20}^{19}+C_{20}^{20}$

$=\left(3^{10}C_{20}^{0}-3^{9}C_{20}^{2}+...-3C_{20}^{18}+C_{20}^{20}\right)+\left(\left(\sqrt{3}\right)^{19}C_{20}^{1}-\left(\sqrt{3}\right)^{17}C_{20}^{3}+...-\sqrt{3}C_{20}^{19}\right)i$

Mặt khác $\left(i+\sqrt{3}\right)^{20}=-2^{19}-i2^{19}\sqrt{3}$

So sánh phần thực của $\left(i+\sqrt{3}\right)^{20}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$S=3^{10}C_{20}^{0}-3^{9}C_{20}^{2}+3^{8}C_{20}^{4}-3^{7}C_{20}^{6}+...-3C_{20}^{18}+C_{20}^{20}=-2^{19}$$

Dạng 2: Khai triển $(x+1)^{n}$, đạo hàm hai vế theo x sau đó cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp

Ví dụ 1 : Tính tổng

$S=C_{30}^{1}-3C_{30}^{3}+5C_{30}^{5}-...-27C_{30}^{27}+29C_{30}^{29}$

$S_{1}=2C_{30}^{2}-4C_{30}^{4}+6C_{30}^{6}-...-28C_{30}^{28}+30C_{30}^{30}$

Lời giải

Xét $(x+1)^{30}=C_{30}^{0}+xC_{30}^{1}+x^{2}C_{30}^{2}+...+x^{30}C_{30}^{30}$

Đạo hàm hai vế ta có $30(x+1)^{29}=C_{30}^{1}+2xC_{30}^{2}+3x^{2}C_{30}^{3}+...30x^{29}C_{30}^{30}$

Cho $x=i$ ta có $30(x+i)^{29}=\left(C_{30}^{1}-3C_{30}^{3}+...+29C_{30}^{29}\right)+\left(2C_{30}^{2}-4C_{30}^{4}+...-28C_{30}^{28}+30C_{30}^{30}\right)i$

Mặt khác $30(i+1)^{29}=-15.2^{15}-i.15.2^{15}$

So sánh phần thực và ảo của $30(1+i)^{29}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$S=C_{30}^{1}-3C_{30}^{3}+5C_{30}^{5}-...-27C_{30}^{27}+29C_{30}^{29}=-15.2^{15}$$

$$S_{1}=2C_{30}^{2}-4C_{30}^{4}+6C_{30}^{6}-...-28C_{30}^{28}+30C_{30}^{30}=-15.2^{15}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tính tổng $S=2.3C_{20}^{2}-4.3^{2}C_{20}^{4}+6.3^{3}C_{20}^{6}-...+18.3^{9}C_{20}^{18}-20.3^{10}C_{20}^{20}$

Gợi ý. Xét khai triển $\left(1+\sqrt{3}x\right)^{20}$

2. Tính tổng $S=1C_{8n}^{1}-3C_{8n}^{3}+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}$.

Gợi ý. Xét khai triển $(1+x)^{8n}$

Ví dụ 2 : Tính tổng
$M=C_{15}^{0}-3C_{15}^{2}+5C_{15}^{4}-7C_{15}^{6}+...+13C_{15}^{12}-15C_{15}^{14}$
$N=2C_{15}^{1}-4C_{15}^{3}+6C_{15}^{5}-8C_{15}^{7}+...+14C_{15}^{13}-16C_{15}^{15}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{15}=C_{15}^{0}+xC_{15}^{1}+x^{2}C_{15}^{2}+...+x^{14}C_{15}^{14}+x^{15}C_{15}^{15}$

Nhân hai vế với x ta có $x(x+1)^{15}=xC_{15}^{0}+x^{2}C_{15}^{1}+x^{3}C_{15}^{2}+...+x^{15}C_{15}^{14}+x^{16}C_{15}^{15}$

Đạo hàm hai vế ta có $(x+1)^{15}+15x(x+1)^{14}=C_{15}^{0}+2xC_{15}^{1}+3x^{2}C_{15}^{2}+..+16x^{15}C_{15}^{15}$

Với $x=i$ ta có

$$(1+i)^{15}+15i(i+1)^{14}=\left(C_{15}^{0}-3C_{15}^{2}+...+13C_{15}^{12}-15C_{15}^{14}\right)+\left(2C_{15}^{1}-4C_{15}^{3}+...+14C_{15}^{13}-16C_{15}^{15}\right)i$$

Mặt khác $(1+i)^{15}=7.2^{8}-2^{7}i$

So sánh phần thực và ảo của $(1+i)^{15}+15i(i+1)^{14}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$M=C_{15}^{0}-3C_{15}^{2}+5C_{15}^{4}-7C_{15}^{6}+...+13C_{15}^{12}-15C_{15}^{14}=7.2^{8}$$
$$N=2C_{15}^{1}-4C_{15}^{3}+6C_{15}^{5}-8C_{15}^{7}+...+14C_{15}^{13}-16C_{15}^{15}=-2^{7}$$

Dạng 3: Khai triển $(x+1)^{n}$, cho x nhận giá trị là các căn bậc ba của đơn vị

Các bài toán ở đây sử dụng tính chất số 3 mà mình đã đề cập ở đầu! Chú ý $a=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 1 : Tính tổng $S=C_{20}^{0}+C_{20}^{3}+C_{20}^{6}+...+C_{20}^{3k}+...+C_{20}^{15}+C_{20}^{18}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{20}=C_{20}^{0}+xC_{20}^{1}+x^{2}C_{20}^{2}+...+x^{19}C_{20}^{19}+x^{20}C_{20}^{20}$

Cho $x=1$ ta có $2^{20}=C_{20}^{2}+C_{20}^{1}+C_{20}^{2}+...+C_{20}^{19}+C_{20}^{20}\ (1)$

Cho $x=a$ ta có $(1+a)^{20}=C_{20}^{0}+aC_{20}^{1}+a^{2}C_{20}^{2}+...++aC_{20}^{19}+a^{2}C_{20}^{20}\ (2)$

Cho $x=a^{2}$ ta có $\left(1+a^{2}\right)^{20}=C_{20}^{0}+a^{2}C_{20}^{1}+aC_{20}^{2}+C_{20}^{3}+...+a^{2}C_{20}^{19}+aC_{20}^{20}\ (3)$

Cộng vế theo vế $(1),(2),(3)$ ta được $2^{20}+(1+a)^{20}+\left(1+a^{2}\right)^{20}=3S$

Mặt khác $(1+a)^{2}=\left(-a^{2}\right)^{20}=a^{40}=a;\left(1+a^{2}\right)^{20}=(-a)^{20}=a^{2}$

Do vậy $3S=2^{20}-1\Rightarrow S=\frac{2^{20}-1}{3}$

Ví dụ 2: Tính tổng $S=C_{20}^{1}+C_{20}^{4}+C_{20}^{7}+...+C_{20}^{3k+1}+...+C_{20}^{16}+C_{20}^{19}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{20}=C_{20}^{0}+xC_{20}^{1}+x^{2}C_{20}^{2}+...+x^{19}C_{20}^{19}+x^{20}C_{20}^{20}$

Nhân hai vế với x^{2} ta có $x^{2}(x+1)^{20}=x^{2}C_{20}^{0}+x^{3}C_{20}^{1}+x^{4}C_{20}^{2}+...+x^{21}C_{20}^{19}+x^{22}C_{20}^{20}$

Cho $x=1$ ta có $2^{20}=C_{20}^{2}+C_{20}^{1}+C_{20}^{2}+...+C_{20}^{19}+C_{20}^{20}\,(1)$

Cho $x=a$ ta có $a^2(1+a)^2=a^2C_{20}^{0}+C_{20}^{1}+aC_{20}^{2}+a^2C_{20}^{3}+C_{20}^{4}+...+a^2C_{20}^{18}+C_{20}^{19}+aC_{20}^{20}\,(2)$

Cho $x=a^2$ ta có $a(1+a^2)^{20}=aC_{20}^{0}+C_{20}^{1}+a^2C_{20}^{2}+aC_{20}^{3}+...+aC_{20}^{18}+C_{20}^{19}+a^2C_{20}^{20}\,(3)$

Cộng vế theo vế $(1),(2),(3)$ ta có $2^{20}+a^2(1+a)^{20}+a(1+a^2)^{20}=3S$

Mặt khác $a^2(1+a)^2=a^{42}=1; a(1+a^2)^{20}=a^{21}=1\Rightarrow S=\dfrac{2^{20}+2}{3}$

Ví dụ 3: Tính tổng $S=C_{20}^{0}+3C_{20}^{3}+6C_{20}^{6}+...+3kC_{20}^{3k}+...+15C_{20}^{15}+18C_{20}^{18}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{20}=C_{20}^{0}+xC_{20}^{1}+x^2C_{20}^{2}+...+x^{19}C_{20}^{19}+x^{20}C_{20}^{20}$

Đạo hàm hai vế ta có $20(x+1)^{19}=C_{20}^{1}+2xC_{20}^{2}+3x^2C_{20}^{3}+...+19x^{18}C_{20}^{19}+20x^{19}C_{20}^{20}\,(*)$

Nhân hai vế $(*)$ với x ta có $20x(x+1)^{19}=xC_{20}^{1}+2x^2C_{20}^{2}+3x^3C_{20}^{3}+...+19x^{19}C_{20}^{19}+20x^{20}C_{20}^{20}$

Cho $x=1$ ta được $20.2^{19}=C_{20}^{1}+2C_{20}^{2}+3C_{20}^{3}+...+19C_{20}^{19}+20C_{20}^{20}\,(1)$

Cho $x=a$ ta có $20a(1+a)^{19}=aC_{20}^{1}+2a^2C_{20}^{2}+3C_{20}^{3}+...19aC_{20}^{19}+20a^2C_{20}^{20}\,(2)$

Cho $x=a^2$ ta có $20a^2(1+a^2)^{19}=a^2C_{20}^{1}+2aC_{20}^{2}+3C_{20}^{3}+4a^2C_{20}^{4}+...+19a^2C_{20}^{19}+20aC_{20}^{20}\,(3)$

Cộng vế theo vế $(1),(2),(3)$ ta có $20\left[2^{19}+a(1+a)^{19}+a^2(1+a^2)^{19}\right]=3S-C_{20}^{0}$

Mặt khác $\begin{cases} a(1+a)^{19}=a(-a^2)^{19}=-a^{39}=-1 \\ a^2(1+a^2)^{19}=a^2(-a)^{19}=-a^{21}=-1 \end{cases}\Rightarrow S=\dfrac{10.2^{20}}{3}-13$

6. ĐỒNG NHẤT HỆ SỐ 2 VẾ.

Phương pháp làm dạng toán này là ta sẽ thực hiện khai triển theo hai cách, sau đó so sánh hệ số của luỹ thừa x^k ở hai vế ta sẽ có điều phải chứng minh!

Ví dụ 1: Cho các số nguyên dương $m,n;0\le p\le \min\{m;n\}$. Chứng minh rằng

$$C_m^p+C_m^{p-1}C_n^1+C_m^{p-2}C_n^2+...+C_m^{p-q}C_n^q+...+C_m^0C_n^p=C_{m+n}^p$$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} (x+1)^m=C_m^0+xC_m^1+x^2C_m^2+...+x^pC_m^p+...+x^mC_m^m \\ (x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^pC_n^p+...+x^nC_n^n \end{cases}$

Nhân theo vế ta có $(x+1)^{m+n}=g(x)+\left(C_m^pC_n^0+C_m^{p-1}C_n^1+...+C_m^{p-q}C_n^q+...+C_m^0C_n^p\right)x^p$

Trong đó $g(x)$ là biểu thức không chứa x^p. Mặt khác hệ số của x^p trong khai triển $(x+1)^{m+n}$ là C_{m+n}^p, đến đây so sánh hệ số của x^p ta có

$$C_{m+n}^p=C_m^pC_n^0+C_m^{p-1}C_n^1+...+C_m^{p-q}C_n^q+...+C_m^0C_n^p$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Chú ý $m=n=p\Rightarrow (C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+...+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Cho $\begin{cases} 0 \le k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ chứng minh rằng $C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k+1} + ... + C_n^{n-k} C_n^n = \dfrac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$

Gợi ý. Viết lại đẳng thức cần chứng minh $C_n^0 C_n^{n-k} + C_n^1 C_n^{n-k-1} + ... + C_n^{n-k} C_n^0 = \dfrac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$

Điều này làm ta gợi tới đến vế trái là hệ số của x^{n-k}. Ta xét $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$, sau đó so sánh hệ số x^{n-k} ở 2 vế ta sẽ có điều phải chứng minh!

Ví dụ 2: Cho 2 số n,k thỏa mãn $\begin{cases} 0 \le k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + ... + C_{k+n}^n = C_{n+k+1}^n$$

Lời giải

Viết lại đẳng thức cần chứng minh: $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + ... + C_{k+n}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$

Điều này làm ta gợi đến vế trái là tổng các hệ số chứa x^k. Xét đa thức

$$P(x) = (1+x)^k + (1+x)^{k+1} + (1+x)^{k+2} + ... + (1+x)^{k+n} = \frac{(1+x)^{n+k+1} - (1+x)^k}{x}$$

So sánh hệ số của số hạng chứa x^k ở 2 vế ta suy ra đpcm.

Ví dụ 3: Tính tổng $S = \left(\dfrac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\dfrac{C_n^1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{C_n^2}{3}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{C_n^n}{n+1}\right)^2$

Lời giải

Ta có $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$

Khi đó $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}\right)^2 = \dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\left(C_{n+1}^1\right)^2 + \left(C_{n+1}^2\right)^2 + ... + \left(C_{n+1}^{n+1}\right)^2\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\left(C_{2(n+1)}^{n+1} - 1\right)$

Ví dụ 4 : Với các số nguyên dương n, tính tổng $S = \left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + ... + n\left(C_n^n\right)^2$

Lời giải

Xét $S = \left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + ... + n\left(C_n^n\right)^2$

$\Rightarrow f'(x) = n(x+1)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + ... + nx^{n-1}C_n^n$

$\Rightarrow xf'(x) = nx(x+1)^{n-1} = xC_n^1 + 2x^2C_n^2 + 3x^3C_n^3 + ... + nx^nC_n^n \ (1)$

Mặt khác $(x+1)^n = x^nC_n^0 + x^{n-1}C_n^1 + x^{n-2}C_n^2 + ... + C_n^n \ (2)$

Nhân theo vế của 2 đẳng thức $(1),(2)$ và so sánh hệ số của x^n ở cả 2 vế ta được

$$S = \left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + ... + n\left(C_n^n\right)^2 = nC_{2n-1}^{n-1} = nC_{2n-1}^n$$

Ví dụ 5 : Tính tổng $S = \dfrac{1}{2}C_{2n}^1 - \dfrac{1}{3}C_{2n}^2 + ... + \dfrac{(-1)^k C_{2n}^{k-1}}{k} + ... + (-1)^{2n+1}\dfrac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$

Lời giải

Với $k=\overline{2,2n+1}$ ta có $\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}=\frac{(2n)!}{k(k-1)!(2n-k+1)!}=\frac{1}{2n+1}.\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}=\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{k}$

Dó đó ta có

$$S=\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}C_{2n}^{k-1}=\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2n+1}C_{2n+1}^{k}=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^{k}-C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}\right)=\frac{1}{2n+1}\left((1-1)^{2n+1}-1+2n+1\right)=\frac{2n}{2n+1}$$

IV. CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

ĐỀ BÀI

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng $\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)^2+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)^2=2^n$

Ví dụ 2: Cho khai triển $(x-1)^{2n}+x(x+1)^{2n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$ với n là số tự nhiên và $n\ge 3$. Biết $\sum_{k=0}^{n}a_{2k}=768$, tính a_5.

Ví dụ 3: Gọi S là tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x trong khai triển nhị thức $P(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2018}$. Tính $S+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Ví dụ 4: Cho khai triển $a_n(x-1)^n+a_{n-1}(x-1)^{n-1}+...+a_1(x-1)+a_0=x^n$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ và $n\ge 5$. Tìm n, biết $a_2+a_3+a_4=83n$.

Ví dụ 5: Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}$, có tất cả bao nhiêu số hạng ?

Ví dụ 6: Có bao nhiêu số thực x để khi khai triển nhị thức $\left(2^x+2^{\frac{1}{2}-x}\right)^n$ có tổng số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng của ba số hạng cuối bằng 22?

Ví dụ 7: Trong khai triển của biểu thức $\left(x^3-x-2\right)^{2017}$. Tính tổng S của các hệ số của x^{2k+1} với k nguyên dương?

Ví dụ 8: Kí hiệu a_{3n-3} là hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} trong khai triển $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3}=26n$.

Ví dụ 9: Cho khai triển $x(x+1)^n+2(x+1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n+1}x^{n+1}$ với n là số tự nhiên và $n\ge 2$. Tìm n, biết rằng a_2-7n; na_n; a_{n-2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 10: Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $\left(1+x+2x^2+...+nx^n\right)^2$ bằng $6n$.

Ví dụ 11: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+1}^{n-1}+C_{n+1}^{n}=171$. Tìm hệ số lớn nhất của biểu thức $P(x)=(1+x)(1+2x)^n$ sau khi khai triển và rút gọn.

Ví dụ 12: Khai triển $\left(1+x+x^2+...+x^{10}\right)^{11}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{110}x^{110}$. Tính tổng $S=C_{11}^0a_0-C_{11}^1a_1+C_{11}^2a_2-C_{11}^3a_3+...+C_{11}^{10}a_{10}-C_{11}^{11}a_{11}$.

Ví dụ 13: Tính tổng

$$C_{2017}^1-2^2C_{2017}^2+3.2^2C_{2017}^3-4.2^3C_{2017}^4+...-2016.2^{2015}C_{2017}^{2016}+2017.2^{2016}C_{2017}^{2017}$$

Ví dụ 14: Tính tổng $T=C_{2017}^1+C_{2017}^3+C_{2017}^5+...+C_{2017}^{2017}$

Ví dụ 15: Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ và thỏa mãn $\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}+\frac{1}{C_4^2}+...+\frac{1}{C_n^2}=\frac{9}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{C_n^5+C_{n+2}^3}{(n-4)!}$.

Ví dụ 16: Tính tổng $S=C_{2018}^{1009}+C_{2018}^{1010}+C_{2018}^{1011}+...+C_{2018}^{2018}$ (trong tổng đó, các số hạng có dạng C_{2018}^k với k nguyên dương nhận giá trị liên tục từ 1009 đến 2018)

Ví dụ 17: Biết rằng trong khai triển nhị thức Niu-tơn của đa thức $P(x)=\left(2+x+2x^2+x^3\right)^n$ thì hệ số của x^5 là 1001. Tổng các hệ số trong khai triển của $P(x)$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 18: Cho khai triển $P(x)=(1+x)(2+x)...(1+2017x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{2017}x^{2017}$. Kí hiệu $P'(x)$ và $P''(x)$ lần lượt là đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của đa thức $P(x)$. Tìm hệ số a_2?

Ví dụ 19: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$\left(1-2x+2015x^{2016}-2016x^{2017}+2017x^{2018}\right)^{60}.$$

Ví dụ 20: Biểu thức $\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^9}{9!}.\frac{(1-x)}{1!}+\frac{x^8}{8!}.\frac{(1-x)^2}{2!}+...+\frac{(1-x)^{10}}{10!}$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 21: Giá trị của $A=\frac{1}{1!2018!}+\frac{1}{2!2017!}+\frac{1}{3!2016!}+...+\frac{1}{1008!1011!}+\frac{1}{1009!1010!}$ bằng?

Ví dụ 22: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

Ví dụ 23: Có bao nhiêu số dương n sao cho

$$S=2+\left(C_1^0+C_2^0+...+C_n^0\right)+\left(C_1^1+C_2^1+...+C_n^1\right)+...+\left(C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}\right)+C_n^n$$

là một số có 1000 chữ số?

Ví dụ 24: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^4+...+C_{2n+1}^{2n}=1024$.

Ví dụ 25: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+...+(3n+2)C_n^n=1600$.

Ví dụ 26 : Với $x \neq -1$ ta có khai triển sau:

$$\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2018}x^{2018}+\frac{b_1}{x+1}+\frac{b_2}{(x+1)^2}+\frac{b_3}{(x+1)^3}+...+\frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

Tính tổng $S=\sum_{k=1}^{2018} b_k$?

Ví dụ 27: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n=\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^4}+...+\frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

Ví dụ 28: Tính tổng $S=\frac{1}{2018}\left(C_{2018}^1\right)^2+\frac{2}{2017}\left(C_{2018}^2\right)^2+...+\frac{2017}{2}\left(C_{2018}^{2017}\right)^2+\frac{2018}{1}\left(C_{2018}^{2018}\right)^2$

Ví dụ 29: Cho số nguyên dương n, tính tổng $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Ví dụ 30: Tính tổng $P=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2$ theo n.

Ví dụ 31: Cho n và k nguyên dương thỏa mãn $k\le n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_n^k}$$

Ví dụ 32: Chứng minh rằng $1+C_n^3+C_n^6+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

Ví dụ 33: Với số tự nhiên $n\ge 1$. Chứng minh rằng

$$C_n^0\cos\alpha+C_n^1\cos 2\alpha+C_n^2\cos 3\alpha+...+C_n^n\cos(n+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$$

Ví dụ 34: Với số tự nhiên $n\ge 1$. Tính tổng sau

$$A=C_n^1(\cos x-\sin x)+0C_n^2+C_n^3 3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)+...+C_n^n.n\sin x\cos x\left(\sin^{n-2}x-\cos^{n-2}x\right)$$

Ví dụ 35: Với số tự nhiên m nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1991}C_{1991}^0-\frac{1}{1991}C_{1991}^1+\frac{1}{1991}C_{1991}^2-...+\frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m=\frac{1}{1991}$$

LỜI GIẢI

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng $\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)^2+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)^2=2^n$

Lời giải

Xét số phức $z=(i+1)^n=C_n^0+iC_n^1+i^2C_n^2+...+i^nC_n^n=\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)+i\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)$

Mặt khác ta lại có $z=(1+i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

So sánh $|z|^2$ ở cả hai vế ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 2: Cho khai triển $(x-1)^{2n}+x(x+1)^{2n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$ với n là số tự nhiên và $n\ge 3$. Biết $\sum_{k=0}^{n}a_{2k}=768$, tính a_5.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}f(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}\\ f(-1)=a_0-a_1+a_2-...+a_{2n}\end{cases}\Rightarrow f(1)+f(-1)=2.\sum_{k=0}^{n}a_{2k}=1536$

hay $2^{2n-1}+2^{2n}=1536\Rightarrow n=5\Rightarrow$ hệ số $a_5=C_{10}^5(-1)^5+C_9^4=-126$.

Ví dụ 3: Gọi S là tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x trong khai triển nhị thức $P(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2018}$. Tính $S+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Lời giải

Ta có $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2018}=\sum_{k=0}^{2018}C_{2018}^{k}.x^{2018-2k}$.

Để lũy thừa với số mũ nguyên dương thì $2018-2k>0\Leftrightarrow k<1009$.

Suy ra $S=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+...+C_{2018}^{1008}$.

Suy ra $S+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+...+C_{2018}^{1008}+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$

$$\xrightarrow{C_n^k=C_n^{n-k}}2\left(S+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}\right)=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+...+C_{2018}^{1008}+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}+C_{2018}^{2018}+C_{2018}^{2017}+...+C_{2018}^{1010}+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$$

$$=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+...+C_{2018}^{2017}+C_{2018}^{2018}=2^{2018}.$$

Vậy $S+\frac{1}{2}C_{2018}^{1009}=2^{2017}$.

Ví dụ 4: Cho khai triển $a_n(x-1)^n+a_{n-1}(x-1)^{n-1}+...+a_1(x-1)+a_0=x^n$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 5$. Tìm n, biết $a_2+a_3+a_4=83n$.

Lời giải

Ta có $x^n=\left[(x-1)+1\right]^n=C_n^0(x-1)^n+C_n^1(x-1)^{n-1}+C_n^2(x-1)^{n-2}+...+C_n^{n-1}(x-1)+C_n^n$.

Vì $a_2+a_3+a_4=83n\Rightarrow C_n^2+C_n^3+C_n^4=83n$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-1)}{2!}+\frac{(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{4!}=83\Rightarrow n=13.$$

Ví dụ 5: Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}$, có tất cả bao nhiêu số hạng ?

Lời giải

Ta có $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}x^{20-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k+\sum_{m=0}^{10}C_{10}^{m}x^{3(10-m)}\left(-\frac{1}{x}\right)^m$

$$=\sum_{k=0}^{20}(-1)^k C_{20}^{k}x^{20-3k}+\sum_{m=0}^{10}(-1)^m C_{10}^{m}x^{30-4m}.$$

Ta tìm các số hạng có cùng lũy thừa của x:

$$\begin{cases}0\leq m\leq 10, 0\leq k\leq 20\\ 20-3k=30-4m\Leftrightarrow 4m-3k=10\end{cases}\Leftrightarrow(k;m)=(2;4),(6;7),(10;10).$$

Vậy trong khai triển đã cho có tất cả $21+11-3=29$ số hạng.

Ví dụ 6: Có bao nhiêu số thực x để khi khai triển nhị thức $\left(2^x+2^{\frac{1}{2}-x}\right)^n$ có tổng số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng của ba số hạng cuối bằng 22?

Lời giải

Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là $T_k = C_n^k \left(2^x\right)^{n-k} \left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^k$.

Từ đó suy ra:

- Tổng hai số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135

$\Rightarrow T_2 + T_4 = C_n^2 \left(2^x\right)^{n-2} \left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^2 + C_n^4 \left(2^x\right)^{n-4} \left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^4 = 135 \ (1)$

- Tổng ba hệ số của ba số cuối bằng 22

$\Rightarrow C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \Leftrightarrow n = 6.$

Thay $n = 6$ vào (1), ta được $C_6^2.2^{4x}.2^{1-2x} + C_6^4.2^{2x}.2^{2-4x} = 135 \Leftrightarrow 2^{2x+1} + 2^{2-2x} = 9.$

Đặt $0 < u = 2^{2x}$, ta được $2u + \dfrac{4}{u} = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 4 \Rightarrow x = 1 \\ u = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy $x \in \left\{1; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 7: Trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 - x - 2\right)^{2017}$. Tính tổng S của các hệ số của x^{2k+1} với k nguyên dương?

Lời giải

Ta có $\left(x^3 - x - 2\right)^{2017} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{6051}x^{6051}$ (1)

Ta cần tính $S = a_3 + a_5 + a_7 + ... + a_{6051}$.

Thay $x = 1$ vào (1), ta được $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{6051} = -2^{2017}$ (2)

Thay $x = -1$ vào (1),, ta được $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... - a_{6051} = -2^{2017}$ (3)

Trừ vế theo vế (2) và (3), ta được $2(a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{6051}) = 0 \Leftrightarrow 2S + 2a_1 = 0 \Leftrightarrow S = -a_1$

Theo khai triển nhị thức Niuton, ta có $\left(x^3 - x - 2\right)^{2017} = \sum\limits_{k=0}^{2017} C_{2017}^k \left(x^3 - x\right)^k (-2)^{2017-k}$

$\Rightarrow$Số hạng a_1x chỉ xuất hiện trong $C_{2017}^1 \left(x^3 - x\right)^1 (-2)^{2017-1}$.

Mà $C_{2017}^1 \left(x^3 - x\right)^1 (-2)^{2017-1} = 2017.2^{2016}.\left(x^3 - x\right) \Rightarrow a_1 = -2017.2^{2016} \Rightarrow S = 2017.2^{2016}$.

Ví dụ 8: Kí hiệu a_{3n-3} là hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} trong khai triển $\left(x^2+1\right)^n (x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

Lời giải

Ta có $\left(x^2+1\right)^n (x+2)^n = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(x^2\right)^{n-k}\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} 2^i\right) = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^k C_n^i 2^i x^{3n-2k-i}$.

Chọn $3n - 2k - i = 3n - 3 \Leftrightarrow 2k + i = 3 \longrightarrow (k;i) \in \{(0;3), \ (1;1)\}$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} là $C_n^0C_n^3 2^3 + C_n^1C_n^1 2$.

Theo giả thiết $C_n^0C_n^3 2^3 + C_n^1C_n^1 2 = 26n \Rightarrow n = 5$.

Ví dụ 9: Cho khai triển $x(x+1)^n + 2(x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n+1}x^{n+1}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 2$. Tìm n, biết rằng $a_2 - 7n;\ na_n;\ a_{n-2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Ta có $x(x+1)^n + 2(x+1)^n = (x+1)^n(x+2) = (x+1)^n[(x+1)+1] = (x+1)^{n+1} + (x+1)^n$.

Suy ra $\begin{cases} a_2 = C_{n+1}^2 + C_n^2 = \dfrac{(n+1)n}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2} = n^2 \\ a_n = C_{n+1}^n + C_n^n = (n+1) + 1 = n+2 \\ a_{n-2} = C_{n+1}^{n-2} + C_n^{n-2} = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6} + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)(n+4)}{6} \end{cases}$

Theo giả thiết bài toán, ta có:

$$n(n+2) - (n^2 - 7n) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} - n(n+2) \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 & (L) \\ n = -7 & (L) \\ n = 10 & (N) \end{cases}$$

Vậy $n = 10$.

Ví dụ 10: Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1 + x + 2x^2 + ... + nx^n)^2$ bằng $6n$.

Lời giải

Ta có $(1 + x + 2x^2 + ... + nx^n)^2 = (1 + x + 2x^2 + ... + nx^n).(1 + x + 2x^2 + ... + nx^n)$

Hệ số của x^n là: $1.n + 1.(n-1) + 2.(n-2) + ... + (n-1).1 + n.1$

$$= 1.n + 1.(n-1) + 2.(n-2) + ... + (n-1).[n-(n-1)] + n.1$$

$$= 2n + n[1 + 2 + 3 + ... + (n-1)] - [1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2]$$

$$= 2n + n\left[\frac{1+(n-1)}{2}.(n-1)\right] - \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right] = \frac{n^3 + 11n}{6}.$$

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{n^3 + 11n}{6} = 6n \Rightarrow n = 5$

Ví dụ 11: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n = 171$. Tìm hệ số lớn nhất của biểu thức $P(x) = (1+x)(1+2x)^n$ sau khi khai triển và rút gọn.

Lời giải

Ta có $C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n = 171 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{2!.(n-1)!} + \dfrac{(n+1)!}{n!} = 171$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=171 \Leftrightarrow n^2+3n-340=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=17 \\ n=-20(L) \end{array}\right.$$

Khi đó $P(x)=(1+x)(1+2x)^{17}=(1+x)\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k 2^k x^k=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k 2^k x^k+\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k 2^k x^{k+1}$.

Suy ra hệ số của x^k trong khai triển là $C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1}2^{k-1}$.

Hệ số của x^k là lớn nhất khi $\begin{cases} C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1}2^{k-1} \ge C_{17}^{k+1}2^{k+1}+C_{17}^k 2^k \\ C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1}2^{k-1} \ge C_{17}^{k-1}2^{k-1}+C_{17}^{k-2} 2^{k-2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{17}^{k-1}2^{k-1} \ge C_{17}^{k+1}2^{k+1} \\ C_{17}^k 2^k \ge C_{17}^{k-2}2^{k-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!.(18-k)!} \ge \dfrac{2^2}{(k+1)!.(16-k)!} \\ \dfrac{2^2}{k!.(17-k)!} \ge \dfrac{1}{(k-2)!.(19-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(18-k)(17-k)} \ge \dfrac{4}{k(k+1)} \\ \dfrac{4}{(k-1)k} \ge \dfrac{1}{(18-k)(19-k)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2-141k+1224 \le 0 \\ 3k^2-147k+1368 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow k=12$$

Vậy hệ số lớn nhất cần tìm là $C_{17}^{12}2^{12}+C_{17}^{11}2^{11}=50692096$.

Ví dụ 12: Khai triển $\left(1+x+x^2+...+x^{10}\right)^{11}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{110}x^{110}$. Tính tổng $S=C_{11}^0a_0-C_{11}^1a_1+C_{11}^2a_2-C_{11}^3a_3+...+C_{11}^{10}a_{10}-C_{11}^{11}a_{11}$.

Lời giải

Xét $x \ne 1$, từ khai triển nhân hai vế cho $(x-1)^{11}$, ta được

$$\left(x^{11}-1\right)^{11}=(x-1)^{11}.\left[a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{110}x^{110}\right].$$

- Vế trái $=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k(-1)^{11-k}x^{11k} \Rightarrow$ Hệ số của x^{11} bằng $C_{11}^1=11$.
- Vế phải $=\left(\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k x^{11-k}(-1)^k\right).\left(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{110}x^{110}\right)$

  $\Rightarrow$ Hệ số của x^{11} bằng $C_{11}^0a_0-C_{11}^1a_1+C_{11}^2a_2-C_{11}^3a_3+...+C_{11}^{10}a_{10}-C_{11}^{11}a_{11}$.

Vậy $S=C_{11}^0a_0-C_{11}^1a_1+C_{11}^2a_2-C_{11}^3a_3+...+C_{11}^{10}a_{10}-C_{11}^{11}a_{11}=11$.

Ví dụ 13: Tính tổng

$$C_{2017}^1-2^2C_{2017}^2+3.2^2C_{2017}^3-4.2^3C_{2017}^4+...-2016.2^{2015}C_{2017}^{2016}+2017.2^{2016}C_{2017}^{2017}$$

Lời giải

Ta có $(1-x)^{2017}=\sum_{k=0}^{2017}C_{2017}^k.(-1)^k.x^k \Rightarrow \left[(1-x)^{2017}\right]'=\sum_{k=0}^{2017}\left[C_{2017}^k.(-1)^k.x^k\right]'$

$$\Leftrightarrow 2017.(1-x)^{2016}=C_{2017}^1-2xC_{2017}^2+3x^2C_{2017}^3-4.2^3C_{2017}^4+...-2016.2^{2015}C_{2017}^{2016}+2017.2^{2016}C_{2017}^{2017}$$

Cho $x=2$ ta được:

$$C_{2017}^{1}-2^2C_{2017}^{2}+3.2^2C_{2017}^{3}-4.2^3C_{2017}^{4}+...-2016.2^{2015}C_{2017}^{2016}+2017.2^{2016}C_{2017}^{2017}=2017.$$

Ví dụ 14: Tính tổng $T=C_{2017}^{1}+C_{2017}^{3}+C_{2017}^{5}+...+C_{2017}^{2017}$

Lời giải

Xét hai khai triển:

- $2^{2017}=(1+1)^{2017}=C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}+C_{2017}^{2}+C_{2017}^{3}+...+C_{2017}^{2017}\ (1)$
- $0=(1-1)^{2017}=C_{2017}^{0}-C_{2017}^{1}+C_{2017}^{2}-C_{2017}^{3}+...-C_{2017}^{2017}\ (2)$

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được: $2^{2017}=2\left(C_{2017}^{1}+C_{2017}^{3}+C_{2017}^{5}+...+C_{2017}^{2017}\right)\Rightarrow T=2^{2016}$.

Ví dụ 15: Với $n\in\mathbb{N},n\ge 2$ và thỏa mãn $\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}+\frac{1}{C_4^2}+...+\frac{1}{C_n^2}=\frac{9}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{C_n^5+C_{n+2}^3}{(n-4)!}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}+\frac{1}{C_4^2}+...+\frac{1}{C_n^2}=\frac{9}{5}\Leftrightarrow\frac{0!2!}{2!}+\frac{1!2!}{3!}+\frac{2!2!}{4!}+...+\frac{(n-2)!2!}{n!}=\frac{9}{5}$

$$\Leftrightarrow 2!\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1)n}\right)=\frac{9}{5}\Leftrightarrow 2!\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2!\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{9}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{n}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow n=10\Rightarrow P=\frac{C_n^5+C_{n+2}^3}{(n-4)!}=\frac{C_{10}^5+C_{12}^3}{6!}=\frac{59}{90}$$

Ví dụ 16: Tính tổng $S=C_{2018}^{1009}+C_{2018}^{1010}+C_{2018}^{1011}+...+C_{2018}^{2018}$ (trong tổng đó, các số hạng có dạng C_{2018}^{k} với k nguyên dương nhận giá trị liên tục từ 1009 đến 2018)

Lời giải

Áp dụng tính chất $C_n^k=C_n^{n-k}$ ta có

$C_{2018}^{0}=C_{2018}^{2018}$

$C_{2018}^{1}=C_{2018}^{2017}$

$C_{2018}^{2}=C_{2018}^{2016}$

.....

$C_{2018}^{1008}=C_{2018}^{1010}$

$C_{2018}^{1009}=C_{2018}^{1009}$

$\Rightarrow C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}+...+C_{2018}^{1009}=C_{2018}^{1009}+C_{2018}^{2010}+...+C_{2018}^{2018}$.

$\Rightarrow 2S=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}+...+C_{2018}^{2018}+C_{2018}^{1009}$.

Mặt khác $C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}+...+C_{2018}^{2018}=(1+1)^{2018}=2^{2018}$.

Vậy $S=\frac{2^{2018}+C_{2018}^{1009}}{2}=2^{2017}+\frac{C_{2018}^{1009}}{2}$.

Ví dụ 17: Biết rằng trong khai triển nhị thức Niu-tơn của đa thức $P(x)=(2+x+2x^2+x^3)^n$ thì hệ số của x^5 là 1001. Tổng các hệ số trong khai triển của $P(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $P(x)=(2+x+2x^2+x^3)^n=(2+x)^n(1+x^2)^n$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^{2l}\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\left(C_n^kC_n^l 2^{n-k}\right)x^{k+2l}.$$

Hệ số của x^5 ứng với $k+2l$ thỏa mãn $k+2l=5\Rightarrow(k;l)=\{(5;0),(3;1),(1;2)\}$

- Trường hợp 1. Với $n\ge 5$ khi đó $(k;l)=\{(5;0),(3;1),(1;2)\}$.

$\Rightarrow$Hệ số của x^5 là $C_n^5C_n^0 2^{n-5}+C_n^3C_n^1 2^{n-3}+C_n^1C_n^2 2^{n-1}=1001$.

Vì vế trái lẻ mà vế phải luôn chẵn nếu $n>5$ do đó chỉ có thể chọn $n=5$.

Thử lại vào phương trình ta thấy $n=5$ thỏa mãn điều kiện.

- Trường hợp 2. Với $3\le n<5$ khi đó $(k;l)=\{(3;1),(1;2)\}$.

$\Rightarrow$Hệ số của x^5 là $C_n^3C_n^1 2^{n-3}+C_n^1C_n^2 2^{n-1}=1001$.

Vì vế trái lẻ mà vế phải luôn chẵn nếu $n>3$ do đó chỉ có thể chọn $n=3$.

Thử lại vào phương trình ta thấy $n=3$ không thỏa mãn điều kiện.

- Trường hợp 3. Với $n=2$ khi đó $(k;l)=(1;2)$.

$\Rightarrow$Hệ số của x^5 là $C_1^2C_2^2 2=1001$: vô lý.

Do đó chỉ có $n=5$ thỏa mãn $\Rightarrow$ tổng các hệ số trong khai triển là $\xrightarrow{\text{cho } x=1} 6^5=7776$.

Ví dụ 18: Cho khai triển $P(x)=(1+x)(2+x)...(1+2017x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{2017}x^{2017}$. Kí hiệu $P'(x)$ và $P''(x)$ lần lượt là đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của đa thức $P(x)$. Tìm hệ số a_2?

Lời giải

Ta có $P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2....+2017a_{2017}x^{2016}$.

Tiếp tục đạo hàm lần nữa, ta có $P''(x)=2a_2+6a_3x....+2017.2016a_{2017}x^{2015}$.

Cho $x=0$, ta được $P''(0)=2a_2\Rightarrow a_2=\dfrac{P''(0)}{2}$

Chú ý $P'(x)=P(x).\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{2+x}+....+\dfrac{2017}{1+2017x}\right)$

$$P''=P(x).\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{2+x}+....+\frac{2017}{1+2017x}\right)^2+P(x)\left(-\frac{1^2}{1+x}-\frac{2^2}{2+x}-....-\frac{2017^2}{1+2017x}\right).$$

Ví dụ 19: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$\left(1-2x+2015x^{2016}-2016x^{2017}+2017x^{2018}\right)^{60}.$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} f(x) = \left(1-2x+2015x^{2016}-2016x^{2017}+2017x^{2018}\right)^{60} \\ g(x) = 2015x^{2016}-2016x^{2017}+2017x^{2018} \end{cases}$.

Suy ra $f(x) = \left[1+\left(-2x+g(x)\right)\right]^{60} = \sum_{k=0}^{60} C_{60}^{k}\left[-2x+g(x)\right]^{k}$

$$= \sum_{k=0}^{60} C_{60}^{k} \sum_{i=0}^{k} C_{k}^{i}(-2x)^{i}.\left[g(x)\right]^{k-i} \quad (0 \le i \le k \le 60).$$

Vì bậc của đa thức $g(x)$ là $2018 \Rightarrow$ số hạng chứa x^3 ứng với $\begin{cases} k-i=0 \\ i=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ i=3 \end{cases}$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_{60}^{3}.C_{3}^{3}.(-2)^{3} = -8.C_{60}^{3}$.

Ví dụ 20: Biểu thức $\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{9}}{9!}.\frac{(1-x)}{1!}+\frac{x^{8}}{8!}.\frac{(1-x)^{2}}{2!}+...+\frac{(1-x)^{10}}{10!}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\frac{x^{k}}{k!}.\frac{(1-x)^{10-k}}{(10-k)!} = \frac{1}{10!}.\frac{10!}{k!(10-k)!}.x^{k}.(1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!}.C_{10}^{k}.x^{k}.(1-x)^{10-k} \quad (0 \le k \le 10)$.

$$\Rightarrow \frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{9}}{9!}.\frac{(1-x)}{1!}+\frac{x^{8}}{8!}.\frac{(1-x)^{2}}{2!}+...+\frac{(1-x)^{10}}{10!}$$

$$= \frac{1}{10!}\sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}.x^{k}.(1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!}(x+1-x)^{10} = \frac{1}{10!}.$$

Ví dụ 21: Giá trị của $A = \frac{1}{1!2018!}+\frac{1}{2!2017!}+\frac{1}{3!2016!}+...+\frac{1}{1008!1011!}+\frac{1}{1009!1010!}$ bằng?

Lời giải

Ta có $\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{C_{n}^{k}}{n!}$. Do đó

$$A = \frac{C_{2019}^{1}}{2019!}+\frac{C_{2019}^{2}}{2019!}+\frac{C_{2019}^{3}}{2019!}+...+\frac{C_{2019}^{1009}}{2019!} = \frac{C_{2019}^{1}+C_{2019}^{2}+...+C_{2019}^{1009}}{2019!}$$

$$= \frac{C_{2019}^{0}+C_{2019}^{1}+C_{2019}^{2}+...+C_{2019}^{1009}-1}{2019!} = \frac{2^{2018}-1}{2019!}.$$

Ví dụ 22: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

Lời giải

Ta có $2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+...+C_{2n+1}^{2n+1}$

$0 = (1-1)^{2n+1} = C_{2n+1}^{0}-C_{2n+1}^{1}+...-C_{2n+1}^{2n+1}$

Suy ra $2\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right) = 2^{2n+1} \Rightarrow C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$

Do đó $2^{2n} = 2024 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{10} \Leftrightarrow n = 5$.

Ví dụ 23: Có bao nhiêu số dương n sao cho

$$S=2+\left(C_1^0+C_2^0+...+C_n^0\right)+\left(C_1^1+C_2^1+...+C_n^1\right)+...+\left(C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}\right)+C_n^n$$

là một số có 1000 chữ số?

Lời giải

Ta có:

$S=2+\left(C_1^0+C_2^0+...+C_n^0\right)+\left(C_1^1+C_2^1+...+C_n^1\right)+...+\left(C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}\right)+C_n^n$

$=2+\left(C_1^0+C_1^1\right)+\left(C_2^0+C_2^1+C_2^2\right)+...+\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+...+C_{n-1}^{n-1}\right)+\left(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n\right)$

$=2+2+(1+1)^2+...+(1+1)^{n-1}+(1+1)^n$

$=2+2^1+2^2+...+2^n=2+2.\dfrac{2^n-1}{2-1}\Rightarrow S=2^{n+1}$.

S là một số có 1000 chữ số $\Rightarrow 10^{999}\le S<10^{1000}\Leftrightarrow 10^{999}\le 2^{n+1}<10^{1000}$

$\Leftrightarrow 999\log_2 10-1\le n<1000\log_2 10-1$

Do $n\in\mathbb{N}$ nên $n\in\{3318;3319;3320\}$.

Vậy có 3 số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 24: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^4+...+C_{2n+1}^{2n}=1024$.

Lời giải

Ta có $(x+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0.x^{2n+1}+C_{2n+1}^1.x^{2n}+...+C_{2n+1}^{2n}.x+C_{2n+1}^{2n+1}$ (1)

Thay $x=1$ vào (1): $2^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+...+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}$ (2)

Thay $x=-1$ vào (1): $0=-C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1-...-C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}$ (3)

Phương trình (2) trừ (3) theo vế: $2^{2n+1}=2\left(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^{2n}\right)$

Theo đề bài ta có $2^{2n+1}=2.1024\Leftrightarrow n=5$

Số hạng tổng quát của khai triển $(2-3x)^{10}$ là $T_{k+1}=C_{10}^k.2^{10-k}.(-3x)^k=C_{10}^k.2^{10-k}.(-3)^k.x^k$

Theo giả thiết ta có $k=5$. Vậy hệ số cần tìm là $C_{10}^5.2^5.(-3)^5=-1959552$.

Ví dụ 25: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+...+(3n+2)C_n^n=1600$.

Lời giải

Ta có $2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+...+(3n+2)C_n^n=3\left(C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n\right)+2\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\right)$.

Mặt khác $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$.

Cách 1: Ta có $kC_n^k=k.\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=n.\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó $C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n=nC_{n-1}^0+nC_{n-1}^1+...+nC_{n-1}^{n-1}=n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+...+C_{n-1}^{n-1}\right)=n2^{n-1}$.

Cách 2: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$ (1).

Đạo hàm hai vế của (1) ta được $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + ... + nx^{n-1}C_n^n$

Khi đó với $x = 1$, ta có $n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$

Do đó $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + ... + (3n+2)C_n^n = 3n.2^{n-1} + 2.2^n = (3n+4).2^{n-1}$.

Theo giả thiết ta có $(3n+4).2^{n-1} = 1600 \Leftrightarrow n = 7$.

Ví dụ 26 : Với $x \neq -1$ ta có khai triển sau:

$$\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2018}x^{2018} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + ... + \frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

Tính tổng $S = \sum_{k=1}^{2018} b_k$?

Lời giải

Đặt $f(x) = \left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018}$, ta có $f(0) = a_0 + b_1 + ... + b_{2018} = 2^{2018}$.

Suy ra $a_0 + S = 2^{2018}$ (1)

Lại có $f(x) = \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018}$

$$= \sum_{k=0}^{1008} \frac{C_{2018}^k}{(x+1)^{2018-2k}} + \sum_{k=1009}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018}.$$

Suy ra

- $b_1 = b_3 = ... = b_{2017} = 0 \Rightarrow S = b_2 + b_4 + ... + b_{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + ... + C_{2018}^{1007} + C_{2018}^{1008}$
- $a_0 = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + ... + C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2018} = C_{2018}^{1009} + S$ (vì $C_n^k = C_n^{n-k}$).(2)

Từ (1) và (2), suy ra $S = 2^{2017} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Ví dụ 27: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^4} + ... + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

Lời giải

Ta có $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!\times 6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow \frac{1}{C_n^3} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Vậy ta có $S_n = \frac{6}{1.2.3} + \frac{6}{2.3.4} + \frac{6}{3.4.5} + ... + \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Nhận xét $\frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}$; $\frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$;...; $\frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}$

$$\Rightarrow S_n = 3\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = 3\left(\frac{n-2}{2n}\right) = \frac{3n-6}{2n}$$

Vậy $\lim S_n = \lim\left(\frac{3n-6}{2n}\right) = \lim\left(\frac{3-\frac{6}{n}}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Kết hợp giả thiết có $\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow n = 98$.

Ví dụ 28: Tính tổng $S = \frac{1}{2018}\left(C_{2018}^1\right)^2 + \frac{2}{2017}\left(C_{2018}^2\right)^2 + ... + \frac{2017}{2}\left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + \frac{2018}{1}\left(C_{2018}^{2018}\right)^2$

Lời giải

Tính tổng $S = \frac{1}{2018}\left(C_{2018}^1\right)^2 + \frac{2}{2017}\left(C_{2018}^2\right)^2 + ... + \frac{2017}{2}\left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + \frac{2018}{1}\left(C_{2018}^{2018}\right)^2$

Ta có $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}.C_n^{k-1}$ với $\forall k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge k$ nên:

$$S = \frac{1}{2018}C_{2018}^1.\frac{2018}{1}C_{2018}^0 + \frac{2}{2017}C_{2018}^2.\frac{2017}{2}C_{2018}^1 + ... + \frac{2018}{1}C_{2018}^{2018}.\frac{1}{2018}C_{2018}^{2017}$$
$$= C_{2018}^1.C_{2018}^0 + C_{2018}^2.C_{2018}^1 + ... + C_{2018}^{2017}.C_{2018}^{2016} + C_{2018}^{2018}.C_{2018}^{2017}.$$

Mà $C_{2018}^k = C_{2018}^{2018-k}$ suy ra $S = C_{2018}^1.C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2.C_{2018}^{2017} + ... + C_{2018}^{2017}.C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018}.C_{2018}^1$.

Mặt khác ta có $(1+x)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k \Rightarrow (1+x)^{2018}.(1+x)^{2018}$

$= \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k.\sum_{l=0}^{2018} C_{2018}^l x^l = \sum_{k,l=0}^{2018} C_{2018}^k.C_{2018}^l.x^{k+l}$ (1).

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (1) là

$$S = C_{2018}^1.C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2.C_{2018}^{2017} + ... + C_{2018}^{2017}.C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018}.C_{2018}^1.$$

Lại do $(1+x)^{2018}.(1+x)^{2018} = (1+x)^{4036}$; $(1+x)^{4036} = \sum_{n=0}^{4036} C_{4036}^n x^n$ (2)

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (2) là C_{4036}^{2019}.

Vậy $S = C_{2018}^1.C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2.C_{2018}^{2017} + ... + C_{2018}^{2017}.C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018}.C_{2018}^1 = C_{4036}^{2019}$

$= \frac{4036!}{2019!.(4036-2019)!} = \frac{4036-2018}{2019}\frac{4036!}{2018!.(4036-2018)!} = \frac{2018}{2019}C_{4036}^{2018}$.

Ví dụ 29: Cho số nguyên dương n, tính tổng $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + ... + \frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Lời giải

Với k, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, $n > 0$ ta có:

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

Áp dụng ta có:

$$\frac{k.C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{C_n^k}{k+1}\left(1-\frac{2}{k+2}\right)=\frac{C_n^k}{k+1}-2\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}-2.\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Suy ra $S=\frac{-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-C_{n+1}^4+...+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}}{n+1}-\frac{2\left[-C_{n+2}^3+C_{n+2}^4+...+(-1)^n C_{n+2}^{n+2}\right]}{(n+1)(n+2)}$.

Ta có:

- $-C_{n+1}^2+...+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}=\left(-C_{n+1}^0+C_{n+1}^1-C_{n+1}^2+...+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}\right)+C_{n+1}^0-C_{n+1}^1$

$=-(1-1)^{n+1}+1-(n+1)=-n$.

- $-C_{n+2}^3+C_{n+2}^4+...+(-1)^n C_{n+2}^{n+2}$

$=\left(C_{n+2}^0-C_{n+2}^1+C_{n+2}^2-C_{n+2}^3+C_{n+2}^4+...+(-1)^n C_{n+2}^{n+2}\right)-\left(C_{n+2}^0-C_{n+2}^1+C_{n+2}^2\right)$

$=(1-1)^{n+1}-\left(1-(n+2)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)=-\frac{n^2+n}{2}$.

Vậy $S=\frac{1}{n+1}(-n)+\frac{2}{(n+1)(n+2)}.\frac{n^2+n}{2}=\frac{-n}{(n+1)(n+2)}$.

Ví dụ 30: Tính tổng $P=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2$ theo n.

Lời giải

Ta có $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ (1).

$(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\right).\left(\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^l\right)$ và $(1+x)^{2n}=\sum_{i=0}^{2n}C_{2n}^i x^i$.

Xét hệ số của x^n trong khai triển vế trái của (1) là $\sum_{k+l=n}C_n^k.C_n^l=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.C_n^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

Hệ số của x^n trong khai triển vế phải của (1) là C_{2n}^n.

Từ đó suy ra $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$

Ví dụ 31: Cho n và k nguyên dương thỏa mãn $k\le n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_n^k}$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!}+\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n+2}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}(n+1-k+k+1)=\frac{n+1}{n+2}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}(n+2)=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{1}{C_n^k}$$

Tổng quát. $\frac{1}{C_{n+1}^1}+\frac{1}{C_{n+1}^2}+...+\frac{1}{C_{n+1}^{n+1}}=\frac{n+2}{2(n+1)}\left(\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+...+\frac{1}{C_n^n}\right)$

Ví dụ 32: Chứng minh rằng $1+C_n^3+C_n^6+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

Lời giải

Ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\,(1)$. Xét số phức $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ ta có

$$\alpha^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=1\Leftrightarrow(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

Mặt khác

- $(1+\alpha)^n=C_n^0+\alpha C_n^1+\alpha^2C_n^2+...+\alpha^nC_n^n=C_n^0+\alpha C_n^1+\alpha^2C_n^2+C_n^3+\alpha C_n^4+\alpha^2C_n^5\,(2)$
- $(1+\alpha^2)^n=C_n^0+\alpha^2C_n^1+\alpha^4C_n^2+...+\alpha^{2n}C_n^n=C_n^0+\alpha^2C_n^1+\alpha C_n^2+C_n^3+\alpha^2C_n^4+...(3)$

Cộng 2 vế của $(1),(2),(3)$ ta có

$$2^n+(1+\alpha)^n+(1+\alpha^2)^n=3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)+\left(1+\alpha+\alpha^2\right)\left(C_n^1+C_n^2+C_n^3...\right)$$
$$=3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)$$

Mà $1+\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};1+\alpha^2=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$ nên ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 33: Với số tự nhiên $n\ge1$. Chứng minh rằng

$$C_n^0\cos\alpha+C_n^1\cos2\alpha+C_n^2\cos3\alpha+...+C_n^n\cos(n+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^nC_n^n\Rightarrow x(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}x^{k+1}C_n^k$

Thay $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$ và sử dụng công thức Moive ta có

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=C_n^0\cos\alpha+C_n^1\cos2\alpha+...+C_n^n\cos(n+1)\alpha$$
$$+i\left(C_n^0\sin\alpha+C_n^1\sin2\alpha+...C_n^n\sin(n+1)\alpha\right)(1)$$

Mặt khác $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n$

Theo công thức Moive ta có

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{n+2}{2}\alpha+i\sin\frac{n+2}{2}\alpha$$

Do đó $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha+i.2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha\,(2)$

Từ $(1),(2)$ ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 34: Với số tự nhiên $n \ge 1$. Tính tổng sau

$A = C_n^1(\cos x - \sin x) + 0C_n^2 + C_n^3 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x) + ... + C_n^n.n\sin x\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$

Lời giải

Xét hàm số $y = (1+\cos x)^n + (1+\sin x)^n$ thì:

$y = (C_n^0 + C_n^1\cos x + C_n^2\cos^2 x + ... + C_n^n\cos^n x) + (C_n^0 + C_n^1\sin x + ... + C_n^n\sin^n x)$

$= 2C_n^0 + C_n^1(\sin x + \cos x) + C_n^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + ... + C_n^n(\sin^n x + \cos^n x)$

$\Rightarrow y' = C_n^1(\cos x - \sin x) + 0.C_n^2 + C_n^3 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$

$+ ... + C_n^n n\sin x\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$

Do đó $A = y' = \left((1+\cos x)^n + (1+\sin x)^n\right) = n(1+\cos x)^{n-1}.(-\sin x) + n(1+\sin x)^{n-1}\cos x$

$= n\left(\cos x(1+\sin x)^{n-1} - \sin x(1+\cos x)^{n-1}\right)$

Ví dụ 35: Với số tự nhiên m nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1991}C_{1991}^0 - \frac{1}{1991}C_{1991}^1 + \frac{1}{1991}C_{1991}^2 - ... + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m = \frac{1}{1991}$$

Lời giải

Với $n = 1,2,...,$ ta đặt $S(n) = \sum_m (-1)^m C_{n-m}^m$ trong đó tổng được lấy từ $m = 0$ cho đến hết những số hạng khác 0. Ta có $\sum_{k=m}^{n} C_m^k = C_{n-1-m}^{m+1} = 1 - S(n)$

Ta có

- $S(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-2} S(k)$, suy ra $S(n+1) = S(n) - S(n-1)$ (1)
- $S(0) = S(1) = 1$, từ đó $S(2) = 0, S(3) = -1, S(4) = -1, S(5) = 0, S(6) = 1, S(7) = 1$

Từ (1) ta có $S(m) = S(n)$ nếu $m = n \pmod 6$. Do $\frac{n}{n-m}C_{n-m}^n = C_{n-m}^m + C_{n-m-1}^{m-1}$ nên ta được:

$$1991.\left[\frac{1}{1991}C_{1991}^0 - \frac{1}{1991}C_{1991}^1 + \frac{1}{1991}C_{1991}^2 - ... + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m + ... - \frac{1}{996}C_{996}^{995}\right] = 1$$

Suy ra điều phải chứng minh.

LỜI KẾT

Vậy là ta đã đi tới những trang cuối cùng của sản phẩm lần này, tuy không phải quá hay nhưng chắc hẳn đã giúp các bạn nắm vững được kiến thức cơ bản của bài tập nâng cao chương này. Do thời gian không cho phép nên chưa thể đưa thêm được nhiều bài toán hay và khó vào được, nên mình sẽ gửi kèm link một số tài liệu tham khảo dưới đây. Một lần nữa cảm ơn những người đã có đóng góp cho bài viết này, chúc các bạn có một kì ôn thi thành công!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Chuyên đề tổ hợp bồi dưỡng học sinh giỏi – Lê Hoành Phò
[2] Chuyên đề nhị thức Newton – Vted.vn
[3] Chuyên đề bồi dường học sinh giỏi tổ hợp và nhị thức Newton
[4] Tuyển tập các chuyên đề tổ hợp - MathScope
[5] Tổ hợp và quy nạp – Hà Huy Khoái
[6] Một số chuyên đề tổ hợp dành cho học sinh năng khiếu
[7] Đẳng thức tổ hợp – VMF
[8] Nhị thức Newton và công thức tổ hợp – Nhiều tác giả